NESTLER

Kurze Gebrauchsanweisung

für den

Rechenschieber
Nr. 28/25 cm und 28a/50 cm
„Universal-Geometer"

ALBERT NESTLER VERKAUFSGESELLSCHAFT
LAHR/BADEN

Nr. A 2/35

Der Rechenschieber in der Geodäsie

Geodätische Rechnungen erfordern, wenn die Genauigkeit der Messungen voll berücksichtigt werden soll, die Benutzung einer fünf- oder sechsstelligen, bisweilen einer siebenstelligen Logarithmentafel oder der Rechenmaschine. Mit der Präzision dieser Hilfsmittel kann und will unser Instrument natürlich nicht in Konkurrenz treten. Soll aber die Bequemlichkeit und Schnelligkeit, die seine Benutzung in andern Wissensgebieten erwünscht, in manchen unentbehrlich macht, der Geodäsie verloren gehen? Die folgenden Ausführungen mögen die Antwort geben.

Schon jetzt bemerken wir:

1. Nach der Ausführung einer längeren logarithmischen Rechnung kann es vorkommen, daß man eine wesentliche Unstimmigkeit bemerkt. Wo liegt der Fehler? Rechnet man in derselben Weise noch einmal, so lehrt die Erfahrung, daß man oft denselben Fehler an derselben Stelle begeht. Eine Kontrolle muß also andersartig sein. Soll sie keinen großen Zeitverlust mit sich bringen, so muß sie schnell durchgeführt werden können. Beides leistet der Rechenstab.

2. Häufig müssen an nahezu richtige Werte Verbesserungen angebracht werden, will man die endgültigen Zahlen erhalten. Zur Berechnung dieser Korrektionen reicht aber der Rechenschieber in den meisten Fällen aus, er gestattet auch, schnell und leicht Tabellen für sie aufzustellen.

3. Bei der Feldmessung auf kleinerem Gelände würde mit den oben erwähnten Methoden manchmal eine übertriebene rechnerische Genauigkeit erzielt werden. Der Rechenschieber streicht hier von selbst überflüssige Dezimalen.

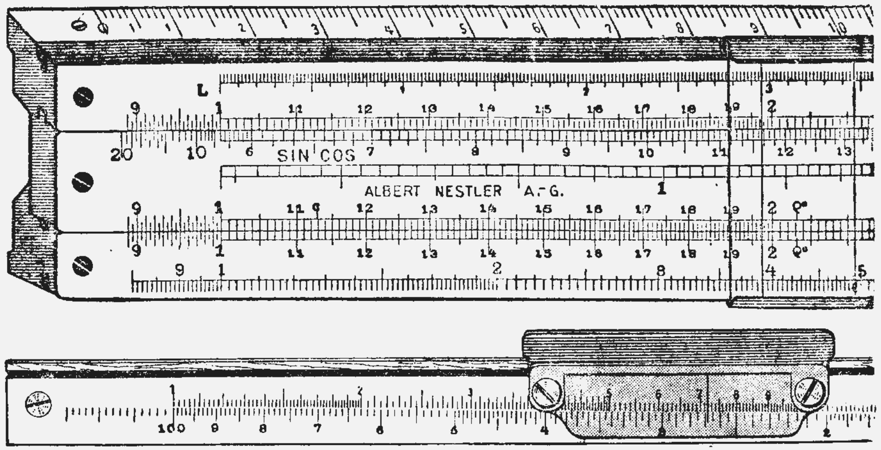
4. Will man eine Logarithmentafel wirklich ausnutzen, so muß man interpolieren. Wer dies einmal mit dem Rechenschieber probiert hat, wird dabei bleiben.

5. Man kann den Rechenschieber leicht mit sich führen, wenn man im Gelände arbeitet und gleichzeitig Überschlagsrechnungen ausführen will. Dies ist ein großer Vorzug gegenüber der Logarithmentafel und erst recht der Rechenmaschine.

Die Beschreibung der Rechenoperationen wird hier oft ohne Beweis gegeben. Wer den Aufbau der einzelnen Skalen und die mathematische Ableitung des Rechenverfahrens genauer kennen lernen möchte, sei auf die in unserem Verlage erschienenen Schriften „Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch" und „Kurze Gebrauchsanweisung für den Nestler-Rechenschieber" hingewiesen. Vgl. auch Nr. 27.

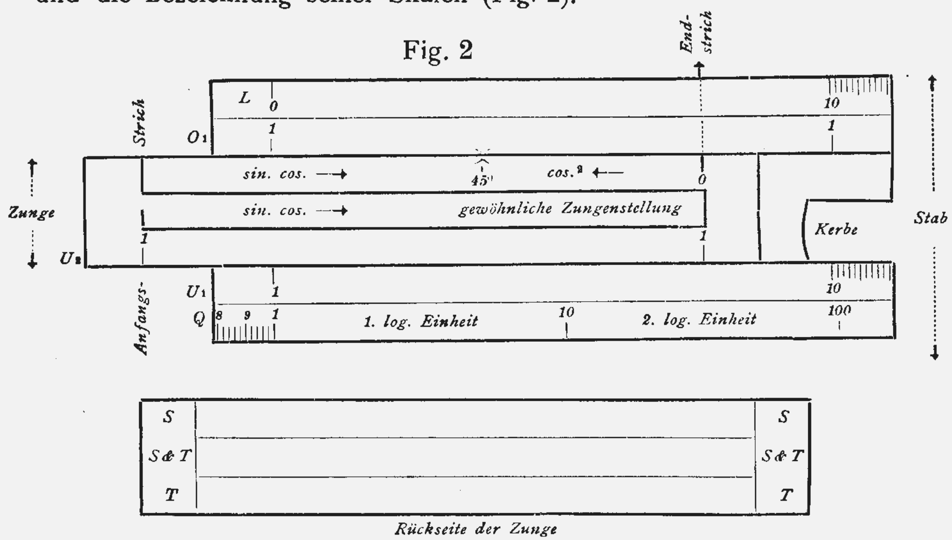
Ein Spezialrechenschieber, wie der vorliegende, unterscheidet sich nach Art und Anordnung der Teilungen von einem Normalrechenstab. Wir bringen daher seine Abbildung (Fig. 1).

Fig. 1



und die Bezeichnung seiner Skalen (Fig. 2).

Fig. 2



1. Die Bestandteile des Rechenschiebers

Wie jeder Rechenstab, so besteht auch der unsrige aus dem festen *Stab* oder *Körper*, in dessen Nuten die bewegliche *Zunge* läuft. Ein *Glasläufer* läßt sich leicht über den Stab hin verschieben. Er trägt drei Vertikalstriche, den mittleren wollen wir stets mit M bezeichnen. Längs der senkrechten Kante des Stabes setzt sich der Läufer in einer Zelluloidplatte fort, auf der ein Strich eingeritzt ist, welcher die Fortsetzung des Mittelstrichs M darstellt.

2. Die Skalen

Auf der schrägen Kante des Stabes finden wir eine Millimeterteilung, die als Zeichenmaßstab dienen kann.

Auf der Vorderseite des Stabes hat man:

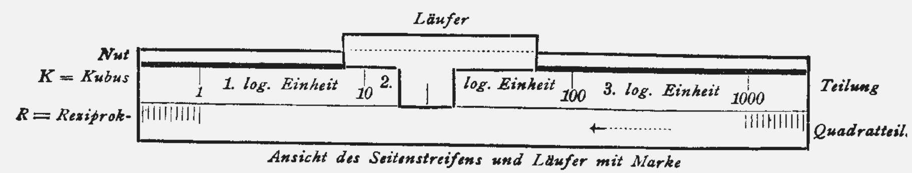
1. Die Teilung L, welche die Logarithmen für die auf O_1 oder U_1 stehenden Zahlen liefert.

2. Die von 1 bis 10 gehende und rechts und links mit Überteilungen versehene Skala O_1.

3. Die Skala U_1, von der dasselbe gilt. Stellt man den Läuferstrich M auf eine Zahl von O_1, so bedeckt er dieselbe Zahl auf U_1.

4. Die Quadratskala Q, die sich von 1 bis 100 erstreckt. Sie dient zur Berechnung der Quadrate von den Zahlen auf U_1.

Fig. 3



Auf der geraden Kante des Schiebers finden wir:

5. Die Kubikskala (1 bis 1000). Sie gibt die Kuben der auf U_1 stehenden Zahlen.

6. Die Reziprokskala R (100 bis 1). Sie liefert die Kehrwerte zu Q. Sie ist rückläufig.

7. Die *Vorderseite der Zunge* trägt die Teilungen sin cos, cos², die mittlere Skala für sin cos und die untere U_2. Diese ist ebenso gebaut wie U_1.

8. *Die Rückseite der Zunge* enthält:
   a) eine mit S bezeichnete Teilung für die Sinuswerte;
   b) eine kombinierte Skala S & T für die Werte der Sinus und Tangenten kleiner Winkel;
   c) eine Skala der Tangenten (T).

Auf der Rückseite des Stabes finden wir eine Anzahl von Naturkonstanten.

3. Das Ablesen der Skalen

Die Skala L ist gleichmäßig geteilt, wie wir es etwa vom Thermometer her kennen. Sie trägt die Bezifferung 0,0; 0,1; 0,2 . . . 1,0. Der Abstand zwischen je zwei bezifferten Teilstrichen ist durch längere Striche in 10 gleiche Teile zerlegt, diese Striche stellen also die Zahlen 0,01; 0,02; 0,03 . . . 0,97; 0,98; 0,99 dar. Zwischen je zweien von ihnen sind vier kleinere Teilstriche angebracht, man kann daher die Zahlen 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,100 . . 0,994; 0,996; 0,998; 1,000 unmittelbar einstellen. Will man aber etwa 0,775 haben, so stellt man den Läuferstrich M genau auf die Mitte zwischen 0,774 und 0,776 ein. Man findet also alle echten dreistelligen Dezimalbrüche auf L.

Die Skalen O_1, U_1, U_2 sind logarithmisch, also ungleichmäßig geteilt, die Teilstriche rücken nach rechts enger zusammen. Wir unterscheiden hier drei Abschnitte.

a) 1 bis 2. Hier sind folgende Zahlen durch Teilstriche wiedergegeben: 1,00; 1,01; 1,02 . . . 1,98; 1,99; 2,00.

b) 2 bis 4. Man liest ab: 2,00; 2,02; 2,04 . . . 3,96; 3,98; 4,00.

c) 4 bis 10. Hier findet man 4,00; 4,05; 4,10; 4,15 . . . 9,80; 9,85; 9,90; 9,95; 10,00.

Zwischenwerte kann man durch Abschätzung finden, wie man ja auch bei Thermometerablesungen Zehntelgrade, bei Längenmessungen Zehntel-Millimeter schätzt. Übung führt hier schnell zum Ziel, auch sei auf die oben erwähnten allgemeinen Anleitungen verwiesen.

Die Einteilung der anderen Skalen kann nach diesen Hinweisen der Leser wohl selbst leicht finden.

4. Der Stellenwert

Bei den Zahlen 3,15; 31,5; 315; 3150 . . . ; 0,315; 0,0315 usw. tritt dieselbe Ziffernfolge 315 auf; sie haben aber einen verschiedenen Wert, der durch die Kommastellung gegeben ist. Der Rechenschieber liefert uns als Ergebnis einer Rechnung nur die Ziffernfolge, nicht den Stellenwert. Es ist so, als ob man mit den Mantissen einer Logarithmentafel rechnet, ohne die Kennziffer zu beachten. Das scheint auf den ersten Blick unangenehm und verwirrend zu sein, ist aber praktisch belanglos. Liefert z. B. der Rechenschieber für eine zu bestimmende Länge l die Ziffern 424, so wird man kaum je im Zweifel sein, ob $l = 4{,}24$ m oder 42,4 m oder 424 m ist.

Will man ganz sicher gehen, so rechnet man einfach im Kopf eine entsprechende Aufgabe mit glatten Zahlen, die sich den gegebenen gut anpassen. Ein rechteckiges Grundstück habe z. B. die Länge 43,75 m und die Breite 17,64 m. Wie groß ist sein Flächeninhalt? Der Rechenschieber gibt, wie wir bald sehen werden, für das Produkt $43{,}75 \times 17{,}64$ die Ziffernfolge 772. Es ist aber $40 \times 20 = 800$, also ist die Fläche 772 m² und nicht 77,2 oder 7720 m². Hätten wir $168{,}9 \times 213{,}6$ zu bestimmen, so bedeutet die Ziffernfolge 361 die Zahl 36100, denn $170 \times 200 = 34000$.

Man kann auch mit Potenzen von 10 rechnen. Es ist $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$ u. s. f., ferner $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$. In unserem ersten Beispiel haben wir $F = 4{,}375 \cdot 10^1 \cdot 1{,}764 \cdot 10^1 = 4{,}375 \cdot 1{,}764 \cdot 10^2$. Nun ist aber $4{,}375 \cdot 1{,}764$ offenbar 7,72, nicht 77,2 oder 0,772. Daher ist das Ergebnis $F = 7{,}72 \cdot 100 = 772$. Im zweiten Fall haben wir $F = 1{,}689 \cdot 10^2 \cdot 2{,}136 \cdot 10^2 = 3{,}61 \cdot 10^4 = 36100$.

Die Erdoberfläche ist 509 951 000 km², davon sind 148 850 000 km² Festland. Wieviel Prozent sind es?

Lösung: $\dfrac{148\,850\,000 \cdot 100}{509\,951\,000}\,\%$. Dafür schreibt man: $\dfrac{14{,}885 \cdot 10^7 \cdot 10^2}{5{,}09951 \cdot 10^8} \approx \dfrac{15 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^1 = 30$. Der Rechenschieber liefert die Ziffernfolge 292, also ist der genauere Wert 29,2 %.

5. Marken auf den Skalen

Zahlen, die in den Rechnungen häufig vorkommen, sind auf den Teilungen durch besondere Striche wiedergegeben. Auf O_1 und U_2 finden wir $c = 1{,}128$ (für Kreisberechnungen), auf U_1 und U_2 steht $\pi = 3{,}1416$, ferner die zur Umrechnung in das Winkelmaß wichtigen Zahlen $\varrho'' = 206265$ (alte Teilung) und $\varrho_{,,} = 636620$ (neue Teilung), endlich steht auf U_2 noch $\sqrt{} = \sqrt{2g} = 4{,}43$ für kinetische Berechnungen. Daß auf die Kommastellung hierbei keine Rücksicht genommen zu werden braucht, geht aus den vorigen Ausführungen hervor.

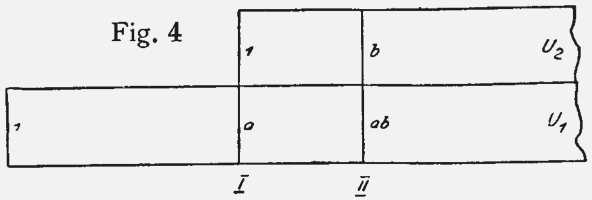
6. Die Multiplikation

Es seien a und b Zahlen, die beide zwischen 1 und 10 liegen, was nach den obigen Darlegungen keine Einschränkung der Allgemeinheit ist; es soll das Produkt $x = a \cdot b$ gebildet werden. Diese Aufgabe läßt sich wegen der logarithmischen Einteilung der Skalen U_1 und U_2 einfach durch Aneinanderlegen zweier Strecken lösen $(lg(a \cdot b) = lg a + lg b)$. Man stellt den Anfangsstrich „1" der Zungenskala U_2 über „a" der Stabskala U_1, wobei man den Läuferstrich M benutzen kann. Dann verschiebt man M so, daß „b" der Zungenskala bedeckt wird. Genau darunter liest man auf U_1 das Ergebnis $x = a \cdot b$ ab. Kürzer ausgedrückt:

Einstellung: „1" (U_2) über „a" (U_1). *Ablesung:* „ab" (U_1) unter „b" (U_2). In Fig. 4 ist die Einstellung mit I, die Ablesung mit II bezeichnet.

Beispiel 1. Man übe das eben geschilderte Verfahren an Beispielen, die man durch Kopfrechnen sofort nachprüfen kann, wie $2 \cdot 3$; $2 \cdot 4$; $3{,}6 \cdot 2$; u. dgl. Man bestätige, daß $43{,}75 \cdot 17{,}64 = 772$ und $168{,}9 \cdot 213{,}6 = 36100$ ist.

Fig. 4



Beispiel 2. Man stelle eine Tabelle der Kreisumfänge her, wenn der Durchmesser $d = 2$; $2{,}1$; $2{,}2$ . . . $2{,}9$; $3{,}0$ cm ist.

Lösung: $U = \pi d$. Man stellt „1“ (U_2) über „π“ (U_1) und verschiebt den Läuferstrich auf „2“, „2,1“, „2,2“ usw. der Skala U_2. Die Zungenstellung braucht dabei nicht geändert zu werden. Dies ist immer der Fall, wenn mehrere Zahlen mit einem konstanten Faktor multipliziert werden sollen. Durch die Ablesungen auf U_1 erhält man die Tabelle:

d	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0 cm
U	6,28	6,60	6,91	7,23	7,54	7,85	8,17	8,48	8,80	9,11	9,42 cm

Beispiel 3. Ein Maßstab aus Messing hat bei $0°$ die genaue Länge 1000 mm. Um wieviel nimmt seine Länge zu, wenn die Temperatur $10{,}8°$; $14{,}5°$; $21{,}7°$; $28{,}4°$; $29{,}6°$ beträgt? Die Ausdehnungszahl ist für Messing $\alpha = 0{,}0000184$.

Lösung: Ist die Temperatur $t°$, so dehnt sich der Stab um $0{,}0184\ t$ mm aus. Da dauernd mit dem ersten Faktor multipliziert werden muß, so setzt man „1“ (U_2) über 1,84 (U_1), sucht t auf U_2 auf und liest darunter auf U_1 die Werte 0,199; 0,267; 0,399; 0,523; 0,545 mm ab. Diese Unterschiede sind den Messungsergebnissen bei den betreffenden Temperaturen hinzuzufügen.

Beispiel 4. Bei einer genauen Rechnung braucht man die siebenstelligen Logarithmen der Zahlen 35650,13; 35650,37; 35650,525. Man führe die Interpolation mit dem Rechenschieber durch:

Lösung: $lg\ 35650 = 4{,}5520595$; $lg\ 35651 = 4{,}5520717$. Man muß die Tafeldifferenz 122 der Reihe nach mit 0,13; 0,37; 0,525 multiplizieren, es ergibt sich 15,8; 45,1; 64,0, also eine Stelle mehr als man braucht. Die gesuchten Logarithmen sind 4,5520611; 4,5520640; 4,5520659. Man führe zum Vergleich dieselbe Rechnung mit den Differenzentäfelchen der Logarithmentafel durch.

Beispiel 5. Die Länge eines rechteckigen Grundstücks wurde von dem Geodäten A zu $a_1 = 72{,}38$ m bestimmt, die Breite b_1 von B zu 11,25 m. Eine Nachmessung mit genaueren Hilfsmitteln ergab $a_2 = 72{,}16$ m, $b_2 = 11{,}20$ m. Wie groß ist der Fehler der ersten Messung und wieviel davon kommt auf das Konto von A und von B?

Lösung: Mit dem Rechenschieber erhält man für die erste Messung $F = 814\ m^2$, für die zweite $808\ m^2$, also einen Fehler von $6\ m^2$. Da aber die letzten Zahlen nur durch Schätzung gefunden wurden, so sind sie ungenau.

Zur genaueren Bestimmung bezeichnet man die Fehler der ersten Beobachtung mit f_a und f_b, dann ist $F_1 = (a_2 + f_a)(b_2 + f_b) = a_2 b_2 + a_2 f_b + b_2 f_a + f_a f_b$. Hierin ist $f_a = 0{,}22$ m, $f_b = 0{,}05$ m. Vernachlässigt man die kleine Fläche $f_a \cdot f_b = 0{,}011\ m^2$, so ist $F_1 = F_2 + a_2 f_b + b_2 f_a$, der Fehler also $a_2 f_b + b_2 f_a = 3{,}61 + 2{,}46 = 6{,}07\ m^2$. Der von B begangene Fehler von 0,05 m hat sich also stärker ausgewirkt, als der von A begangene (0,22 m). Bei der Berechnung eines langgestreckten Rechtecks muß die schmale Seite viel genauer ermittelt werden als die lange. Mit fünfstelligen Logarithmen findet man $F_1 = 814{,}28$; $F_2 = 808{,}20$; $F_1 - F_2 = 6{,}08 m^2$. Bei geschickter Anordnung der Rechnung hat hier der Rechenschieber dieselbe Genauigkeit erzielt und zudem den Einfluß der beiden Beobachtungen festgestellt.

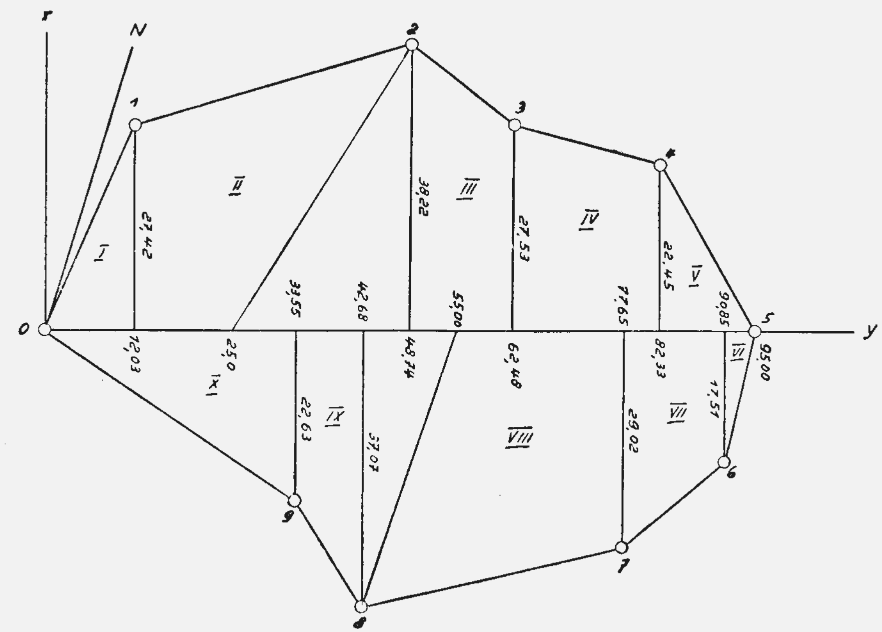
7. Der Zungenrückschlag

Das bisher beschriebene Verfahren läßt eine Lücke offen. Behandelt man, wie in Beispiel 1, die Multiplikation der Zahl 2, so kommt man nur bis $2 \cdot 5 = 10$. Wir hatten dabei „1“ (U_2) über „2“ (U_1) gestellt. Nun ist aber bei dem Rechenschieber die Zahl „10“ mit „1“ gleichwertig, da sie sich nur durch die Kommastellung unterscheidet. Wir nehmen also eine *Zungenverschiebung* oder einen *Zungenrückschlag* vor. Wir bedecken „1“ (U_2) mit dem Läuferstrich M und verschieben die Zunge so weit nach links, bis statt der „1“ die Zahl „10“ unter ihm steht. Dann findet man sofort, daß $2 \cdot 6 = 12$; $2 \cdot 7 = 14$ ist usw. Natürlich ist dies Verfahren nicht auf die Zahl 2 beschränkt, sondern kann immer, auch in umgekehrter Richtung, angewendet werden, wenn es zweckmäßig ist. So können wir die in Beispiel 2 berechnete Tabelle ergänzen durch die folgende:

d	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
U	9,74	10,05	10,37	10,68	11,00	11,31	11,62	11,94	12,25	12,57 usw.

Beispiel 6. Ein Grundstück wurde nach der Koordinatenmethode aufgenommen (Fig. 5). Welche Fläche hat es?

Fig. 5



Lösung: Die zu messende Fläche ist in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze zerlegt. Die doppelte Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Produkt der Katheten. Die doppelte Fläche eines Trapezes erhält man, wenn man die Summe der parallelen Seiten mit der Höhe multipliziert. So ist hier $2F_1 = 12{,}03 \cdot 27{,}42 =$

329,87 m²; $F_2 = (48{,}74 - 12{,}03)\,(38{,}22 + 27{,}42) = 36{,}71 \cdot 65{,}64 = 2409{,}6$ m² usw. Jemand erhält mit einer fünfstelligen Tafel die Werte der Tabelle *a*.

a) $2F_{\mathrm{I}}$	$2F_{\mathrm{II}}$	$2F_{\mathrm{III}}$	$2F_{\mathrm{IV}}$	$2F_{\mathrm{V}}$	$2F_{\mathrm{VI}}$	$2F_{\mathrm{VII}}$	$2F_{\mathrm{VIII}}$	$2F_{\mathrm{IX}}$	$2F_{\mathrm{X}}$
329,87	2409,6	903,42	992,10	284,45	72,67	614,19	2258,6	545,05	759,22

Der Rechenschieber liefert die Tabelle *b*:

b) $2F_{\mathrm{I}}$	$2F_{\mathrm{II}}$	$2F_{\mathrm{III}}$	$2F_{\mathrm{IV}}$	$2F_{\mathrm{V}}$	$2F_{\mathrm{VI}}$	$2F_{\mathrm{VII}}$	$2F_{\mathrm{VIII}}$	$2F_{\mathrm{IX}}$	$2F_{\mathrm{X}}$
330	2410	903	992	285	72,7	614	2310	545	759

Bei $2F_{\mathrm{VIII}}$ besteht eine Unstimmigkeit. Die Nachrechnung ergibt, daß in dem Produkt $34{,}97 \cdot 66{,}09$ der Logarithmus der zweiten Zahl 1,82014 sein muß, während irrtümlich (Übersehen eines Sternchens der Tafel) 1,81014 angenommen wurde. $2F_{\mathrm{VIII}}$ ist richtig 2311,2.

Durch Summierung der Teilflächen ergibt sich fünfstellig $2F = 9221{,}77$ m², während der Rechenschieber $2F = 9220{,}7$ m² liefert. Der Fehler beträgt $-0{,}012\,\%$. $F = 4610{,}88$ m² (4610,35 m²).

Beispiel 7. Für die Fläche eines Vierecks, dessen Ecken, wie hier, durch Koordinaten gegeben sind, gelten die Formeln:

$$a)\ 2F = x_1\,(y_2 - y_n) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_4 - y_2) + \ldots + x_n\,(y_1 - y_{n-1}),$$

oder in kürzerer Schreibweise:

$$2F = \sum_1^n x_\nu\,(y_{\nu+1} - y_{\nu-1})$$

$$b)\ 2F = \sum_1^n y_\nu\,(x_{\nu-1} - x_{\nu+1})$$

$$c)\ 2F = \sum_1^n (y_{\nu+1} - y_\nu)\,(x_{\nu+1} + x_\nu)$$

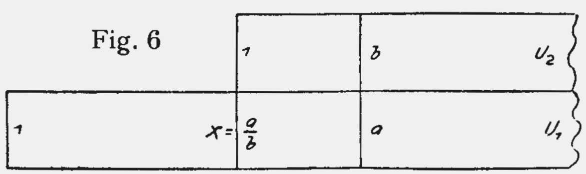
In ihnen ist x_0 durch x_n, y_0 durch y_n, x_{n+1} durch x_1, y_{n+1} durch y_1 zu ersetzen.

Man rechne mit ihnen das vorige Beispiel nach und achte dabei auf die Vorzeichen der Koordinaten.

8. Die Division

Will man $x = \frac{a}{b}$ finden, so stellt man „b“ (U_2) über „a“ (U_1) und liest das Ergebnis unter „1“ oder „10“ (U_2) auf U_1 ab (Fig. 6).

Fig. 6



Vergleicht man Fig. 6 mit Fig. 4, so erkennt man sofort, daß bei dieser Einstellung $x \cdot b = a$ sein muß, wodurch der Beweis geliefert ist. Faßt man die feste Skala als Träger des Zählers, die Zungenteilung als Träger des Nenners auf, zwischen denen der Bruchstrich steht, so haben wir $\frac{a}{b} = \frac{x}{1}$.

Man kann auch „b“ (U_2) über „1“ (U_1) stellen, dann steht „x“ auf U_1 unter „a“ (U_2).

Hier ist $b \cdot x = a$, also wiederum $x = \frac{a}{b}$.

Das erste Verfahren bietet den Vorteil, daß nie ein Zungenrückschlag nötig ist, denn „1“ oder „10“ von U_2 steht stets über einer Zahl von U_1. Die

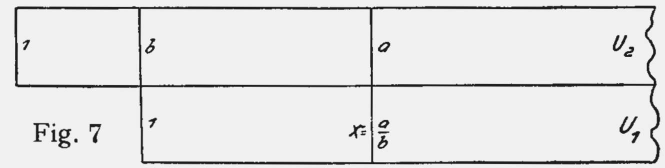


Fig. 7

zweite Methode empfiehlt sich dann, wenn eine Anzahl von Brüchen mit gleichem Nenner b zu berechnen ist. Nach der Einstellung setzt man den Läuferstrich M einfach auf die verschiedenen Zähler a_1, a_2, a_3 . . . und liest unter ihnen sofort die Ergebnisse $\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \frac{a_3}{b}$ . . . ab.

Man übe die beiden Verfahren zunächst an einfachen Zahlen, bei denen man die Ergebnisse leicht kontrollieren kann.

Der Kehrwert. Der Kehrwert einer Zahl b ist $\frac{1}{b}$. Man erhält ihn nach dem vorigen Verfahren, wenn man $a = 1$ oder 10 setzt. Steht b auf der festen Skala U_1, so stellt man „1“ (U_2) darüber und liest $\frac{1}{b}$ auf U_2 über „10“ (U_1) ab. Gegenüber der vorigen Methode haben die Skalen U_1 und U_2 nur ihre Rolle vertauscht, was bei ihrer gleichartigen Konstruktion gestattet ist.

Beispiel 8. $tg\,\alpha$ ist der Reihe nach 0,5; 0,52; 0,788; 0,995; 1,082; 2,44. Wie groß ist $ctg\,\alpha$?

Lösung: $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = 2{,}0$; 1,923; 1,269; 1,005; 0,924; 0,410.

Beispiel 9. Ein englischer Fuß ist 0,3048 m, ein Pariser Fuß 0,3248 m ein preußischer Fuß 0,3139 m. Wieviel Fuß entsprechen 1 m?

Lösung: $1\,\mathrm{m} = \frac{1}{0{,}3048} = 3{,}28$ engl. Fuß $= 3{,}08$ Pariser Fuß $= 3{,}186$ preußischer Fuß. Man bilde selbst ähnliche Aufgaben mit andern Längen-, Flächen-, Körper- und Gewichtsmaßen und führe Valutenumrechnungen durch.

Beispiel 10. Die Entfernung der Punkte P und Q ist durch eine sehr genaue Messung zu $L = 1884{,}45$ m festgestellt worden. Auf ihrer Verbindungsgeraden werden die Punkte A, B, C, D, E eingemessen. Man findet $PA = l_1 = 404{,}35$ m, $AB = l_2 = 306{,}22$ m, $BC = l_3 = 518{,}46$ m, $CD = l_4 = 94{,}16$ m, $DE = l_5 = 217{,}08$ m, $EQ = l_6 = 343{,}50$ m. Sind diese Zahlen endgültig oder müssen sie verbessert werden, und wie?

Lösung: Die Summe der Teilstrecken ist $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$ oder in der bekannten Abkürzung für eine Summe gleichartiger Ausdrücke, gleich $[l]$. Hier ist $[l] = 1883{,}77$ m. Es sind also kleine Messungsfehler vorgekommen, die zusammen $d = L - [l] = 1884{,}45 - 1883{,}77 = 0{,}68$ m ausmachen. Man verteilt sie auf die einzelnen Strecken nach deren Länge. Die Verbesserungen betragen daher $\frac{d}{[l]}\,l_1$, $\frac{d}{[l]}\,l_2$ usw. In unserm Fall ist $\frac{d}{[l]} = \frac{0{,}68}{1883{,}77}$. Der Rechenschieber liefert dafür den

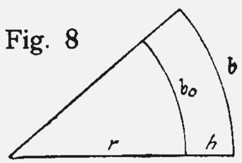
Wert 0,000361. Will man die Verbesserungen in cm haben, so muß man 0,0361 mit $l_1, l_2, \ldots l_6$ multiplizieren. Man stellt „1“ (U_2) über „3,61“ (U_1) und findet für l_5 die Verbesserung 7,84 cm. Dann nimmt man einen Zungenrückschlag vor und erhält für l_1 14,60 cm, für l_2 11,05 cm, für l_3 18,70 cm, für l_4 3,40 cm, für l_6 12,40 cm. Die verbesserten Teilstrecken sind also $l_1 = 404{,}4960$ m, $l_2 = 306{,}3305$ m, $l_3 = 518{,}6470$ m, $l_4 = 94{,}1940$ m, $l_5 = 217{,}1584$ m, $l_6 = 343{,}6240$ m. Ihre Summe, $[l]$ wird jetzt 1884,4499 m. Die Genauigkeit des Rechenschiebers ist hier mehr als ausreichend.

Beispiel 11. In der Meereshöhe h wird die Länge b m gemessen. Wie groß ist die auf die Meeresfläche reduzierte Länge b_0?

Lösung: Die Kreisbogen b und b_0 verhalten sich wie die zugehörigen Radien. Es ist $\frac{b}{b_0} = \frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$. Es ist daher

$b_0 = \dfrac{b}{1+\frac{h}{r}} \approx b\left(1 - \frac{h}{r}\right)$. An b muß daher die Korrektion $-\, b \cdot \frac{h}{r}$ angebracht werden. Man rechne die folgende Tabelle nach, die für $b = 1$ km und $r = 6370$ km (mittlerer Erdradius) gilt:

Fig. 8



h	0	100	200	300	400	500 m
$\frac{b\,h}{r}$	0	15,7	31,4	45,1	62,8	78,5 mm

Man rechne jeden Teilausdruck für sich aus und kontrolliere die Ergebnisse durch Multiplikation von 15,7 mit 2, 3, 4, 5.

Beispiel 12. Eine Straße steigt auf s m Länge um h m an. Dann ist die prozentuale Steigung $\frac{100\,h}{s}$. Man prüfe die Tabelle:

s	42,4	313	1587	3324	m
h	1,85	2,16	62,9	92,5	m
Steigung	4,36	0,69	3,96	2,78	%

Beispiel 13. Bei einer trigonometrischen Rechnung erhält man: $lg\ tg\ a_1 = 8{,}85730$; $lg\ tg\ a_2 = 8{,}85789$; $lg\ tg\ a_3 = 8{,}85800$; $lg\ tg\ a_4 = 8{,}85837$; $lg\ tg\ a_5 = 8{,}85862$. Wie groß sind die zugehörigen Winkel?

Lösung: Einer fünfstelligen Tafel, die sich auf Neugrad (Vgl. Abschnitt 19) bezieht, entnimmt man $lg\ tg\ 4^g{,}5700 = 8{,}85678$; $lg\ tg\ 4^g{,}5800 = 8{,}85774$; $lg\ tg\ 4^g{,}5900 = 8{,}85869$. Die Taldifferenzen sind also $d_t = 96$ und 95 Einheiten der letzten Dezimale. Bezeichnet man die Abweichungen der gegebenen Werte von $lg\ tg\ a$ mit k, den Zuwachs des Winkels mit h, so ist also $h = 100^{cc} \cdot \frac{k}{d_t}$. Im ersten Fall ist $k_1 = 52$, also $h_1 = 100 \cdot \frac{52}{96} = 54^{cc}$, $a_1 = 4^g57^c54^{cc}$. Im zweiten ist $k_2 = 15$, $h_2 = 100 \cdot \frac{15}{95} = 16^{cc}$, $a_2 = 4^g58^c16^{cc}$. Entsprechend erhält man $a_3 = 4^g58^c27^{cc}$, $a_4 = 4^g58^c66^{cc}$, $a_5 = 4^g58^c92^{cc}$.

Bei einer nach aller Teilung eingerichteten Tafel hat man: $lg\ tg\ 4°7' = 8{,}85717$, $lg\ tg\ 4°8' = 8{,}85893$, also $d_t = 176$ Da auf d_t $1' = 60''$ kommen, so ist der Winkelzuwachs $h = \frac{60'' \cdot k}{d_t}$. Man stellt $\frac{60''}{d_t} = 0{,}341$ ein und erhält nach Multiplikation mit $k = 13$; 72, 83; 120; 145 die Zahlen 4",4; 24",6; 28",3; 40",9; 49",4, um die man den Winkel $4°7'$ vergrößern muß.

Man führe zum Vergleich dieselben Rechnungen mit den Differenzentäfelchen durch.

9. Zusammengesetzte Multiplikation und Division

a) $x = a \cdot b \cdot c$.

Nehmen wir ein ganz willkürliches Beispiel: $x = 1{,}22 \cdot 2{,}36 \cdot 2{,}96$. Wir können nach Nr. 6 feststellen, daß $1{,}22 \cdot 2{,}36 = 2{,}88$ ist. Multiplizieren wir 2,88 mit 2,96, so erhalten wir 8,525. Bei der Ausführung dieser Rechnung zeigt sich, daß die Ablesung des Zwischenergebnisses, $ab = 2{,}88$ entbehrlich ist. Um $a\,b\,c$ zu bestimmen, verfährt man nach folgender Regel:

Man stellt „1“ (U_2) über „a“ (U_1) und verschiebt M auf „b“ (U_2). Statt darunter auf U_1 abzulesen, setzt man „1“ (U_2) unter den Läuferstrich M und geht auf „c“ (U_2) weiter. Genau darunter steht $x = a \cdot b \cdot c$. Daß dabei ein Zungenrückschlag „10“ (U_2) statt „1“ (U_2), nötig sein kann, ist selbstverständlich. Sind mehr als drei Faktoren vorhanden, so setzt man das Verfahren einfach fort. Zur Kontrolle kann man die Reihenfolge der Faktoren ändern.

Beispiel 14. Ein Marktplatz ist 42,5 m lang und 37,2 m breit. Er soll um 0,7 m tiefer gelegt werden. Wieviel Kubikmeter Erde müssen entfernt werden und wieviel wiegen sie, wenn man das spezifische Gewicht zu 2,1 annimmt?

Lösung: $x = 42{,}5 \cdot 37{,}2 \cdot 0{,}7$ m³ $= 1107$ m³ (Abschätzung: $40 \cdot 40 \cdot 0{,}5 = 800$) Die letzte Einstellung kann man sofort zur Bestimmung des Gewichts benutzen, man findet dafür 2324 t.

Beispiel 15. Die Cheopspyramide hat als Grundfläche ein Quadrat von 233 m Seitenlänge, ihre Höhe beträgt 147 m. Wie groß ist ihr Rauminhalt, wie groß daß Gewicht des verwendeten Materials, wenn man das spezifische Gewicht zu 1,9 annimmt?

Lösung: $V = \frac{1}{3} a \cdot a \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 7{,}98 \cdot 10^6 \cdot = 2{,}66 \cdot 10^6$ m³; $G = 5{,}05$ Millionen Tonnen.

Beispiel 16. Um wieviel dehnt sich ein Stahlmeßband, das bei 18° die Länge 15 m hat, aus, wenn man es bei 35° benutzt? Der Ausdehnungskoeffizient ist $a = 0{,}0000117$.

Lösung: $a = a \cdot l \cdot t = 0{,}0000117 \cdot 15 \cdot 17 = 0{,}00298$ m $= 2{,}98$ mm.

b) $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$.

Man kann ab so berechnen, wie auf S. 6 angegeben wurde. Das auf U_1 erhaltene Resultat braucht nicht abgelesen zu werden. Man setzt mit Hilfe des Läuferstrichs M „c“ (U_2) darüber und findet auf U_1 x unter „1“ (U_2). Hier sind zwei Einstellungen der Zunge nötig.

Besser setzt man $x = \frac{a}{c} \cdot b$. Man bestimmt $\frac{a}{b}$ nach S. 9. Die Ablesung ist unnötig. Jetzt sucht man, ohne die Lage der Zunge zu ändern, „b“ auf U_2 auf und liest das Ergebnis x darunter auf U_1 ab. Da nur *eine* Zungeneinstellung nötig ist, so ist dies Verfahren einfacher als das vorige. Jenes kann aber zur Kontrolle dienen.

Beispiel 17. An einer Straße liegen zwei Grundstücke, von denen das eine $a = 42{,}5$ m Straßenfront und $b = 17{,}4$ m Tiefe hat. Der Eigentümer will es gegen ein anderes tauschen, welches $c = 35{,}7$ m lang ist. Welche Tiefe kann er beanspruchen?

Lösung: $x = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{42{,}5 \cdot 17{,}4}{35{,}7} = 20{,}7$ m. Man prüfe die folgende Tabelle:

a	10,24	18,75	33,36	24,16	75,42 m
b	13,16	16,35	18,08	49,05	7,28 m
c	20,75	10,50	25,15	30,15	40,0 m
x	6,50	29,2	24,0	39,3	13,72 m

Beispiel 18. Ein Theodolitenkreis hat den Durchmesser $d = 140$ mm und ist in $t = \frac{1}{3}°$ eingeteilt. Welchen Abstand x haben die Teilstriche?

Lösung: Der Umfang ist $\pi \cdot d$ mm, er zerfällt in $n = 3 \cdot 360 = 1080$ Teile; $x = \frac{\pi \cdot d}{n} = \frac{3{,}142 \cdot 140}{1080} = 0{,}407$ mm. Man rechne die folgende Tabelle nach:

d	115	120	90	125	110	120	100	135	100	210 mm
t	30′	$^1/_2{}^g$	50^c	20^c	20^c	20^c	10^c	20^c	50^c	10^c
n	720	800	800	2000	2000	2000	4000	2000	800	4000
x	0,502	0,471	0,354	0,1964	0,1728	0,1885	0,0785	0,212	0,393	0,1650mm

Beispiel 19. Ein Grundstück, dessen Fläche $F = 192\,000$ m² bekannt ist, zerfällt in fünf Parzellen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Ihre Begrenzung ist unregelmäßig. Man umfährt alle Begrenzungslinien mit dem Planimeterstift und erhält auf der Laufrolle die Ablesungen:

F	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
3302	868	435	1206	307	486.

Wie groß sind die einzelnen Parzellen?

Lösung: $F_1 = \frac{F \cdot 868}{3302}$. Man stellt „3302“ (U_2) über „192000“ (U_1), sucht auf U_2 „868“ auf und liest darunter auf U_1 ab, daß $F_1 = 50\,500$ mm² ist. Will man F_2 haben, so braucht man, ohne die Zungenstellung zu ändern, nur den Läuferstrich von „868“ (U_2) auf „435“ (U_2) zu verschieben usw. Es ergibt sich $F_1 = 50\,500$ m², $F_2 = 25\,300$ m², $F_3 = 70\,100$ m², $F_4 = 17\,850$ m², $F_5 = 28\,240$ m². Daß die Summe $[F] = 191\,990$ m² statt 192 000 m² ist, wird nicht stören; um rechnerische Richtigkeit zu erzielen, kann man so ausgleichen, wie in Beispiel 10.

c) $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{bc}}$. Man rechnet $\frac{a}{b}$ nach Nr. 8, S. 9 aus und dividiert das Ergebnis, das nicht abgelesen zu werden braucht, nochmals durch c. Probe: $x = (a : c) : b$.

Man kann aber auch $\frac{b\,c}{a}$ bilden (Ablesung unnötig) und den Kehrwert davon bestimmen (vgl. S. 10).

Beispiel 20: Ein Theodolitenkreis hat den Durchmesser d mm. Mit Hilfe des Nonius kann man auf ihm noch einen Unterschied von etwa 0,001 mm feststellen. Wie groß ist dann der mögliche Fehler einer Winkelablesung?

Lösung: Der Kreisumfang beträgt $\pi \cdot d$ mm; ihm entsprechen in der alten Teilung $360° = 1296000''$, in der neuen $4\,000\,000^{cc}$. 1 mm entspricht $\frac{1296000''}{\pi d} = \frac{4000000^{cc}}{\pi d}$, 0,001 mm der tausendste Teil.

Man erhält folgende Tabelle für den Fehler f:

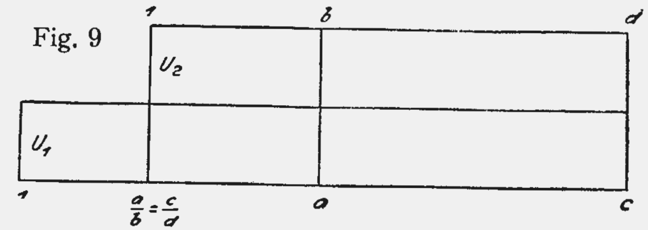
d	90	100	110	120	125	135	140	210	mm
f	4,58	4,13	3,75	3,44	3,30	3,06	2,95	1,96	″
f	14,14	12,73	11,58	10,61	10,19	9,43	9,10	6,06	cc

Da die Schätzung von 0,001 mm nur ungenau sein kann, so ist hier die Genauigkeit des Schiebers mehr als ausreichend. Die Ergebnisse können stark abgerundet werden.

d) Proportionen. Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder, nur anders geschrieben, $a : b = c : d$, so hat man eine *Proportion* vor sich. Bei ihr ist stets $a \cdot d = b \cdot c$. Der Zusammenhang der vier Glieder wird auf dem Rechenstab sehr einfach dargestellt: man setzt „b“ (U_2) über „a“ (U_1), dann muß auch „d“ (U_2) über „c“ (U_1) stehen (Fig. 9).

Mit dieser Einstellung kann man, wenn drei der auftretenden Größen bekannt sind, die vierte finden.

Fig. 9



Beispiel 21. Man rechne Beispiel 19 nach dem angegebenen Verfahren.
Lösung. $F : 3302 = F_1 : 868 = F_2 : 435$ usw. Man erhält dieselbe Einstellung wie dort.

Beispiel 22. Man berechne $x = ab$, $y = a : b$, $z = \frac{a\,b}{c}$ nach der Proportionsmethode.

Lösung: 1) $1 : a = b : x$ oder $1 : b = a : x$. 2) $b : a = 1 : y$ oder $b : 1 = a : y$. 3) $z : a = b : c$ oder $z : b = a : c$. Als Übungsaufgabe kann man die meisten bisher behandelten Beispiele durchrechnen.

Beispiel 23. Zwei Punkte, P_1 und P_2, haben die sehr genau bekannten Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2. Es ist $x_2 - x_1 = 531{,}936$ m und $y_2 - y_1 = 278{,}448$ m.

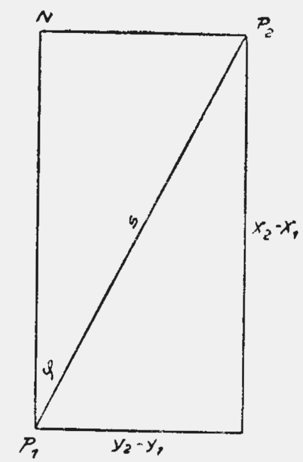
Die Länge $s = P_1\,P_2$ und der Richtungswinkel der Geraden $P_1\,P_2$ sollen unter Benutzung einer siebenstelligen Logarithmentafel bestimmt werden.

Lösung: $tg\ \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $s = \frac{y_2 - y_1}{\sin \varphi} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \varphi}$.

Man findet $lg\ tg\ \varphi = 9{,}7188848$. Die Tafel gibt folgende Zusammenstellung:

Winkel	$lg\ tg$
27° 37′ 40″	9,7188377
50″	9,7188890
$lg\ sin$	$lg\ cos$
9,6662611	9,9474234
9,6663013	9,9474123

Fig. 10



Die Differenzen $d_w = 10''$, $d_t = 513$, $d_s = 402$, $d_c = -111$ kann man der Tafel ebenfalls entnehmen. Die in unserem Fall auftretenden Zusatzgrößen seien h_w, h_t, h_s, h_c. Dann ist $\frac{h_w}{d_w} = \frac{h_t}{d_t} = \frac{h_s}{d_s} = \frac{h_c}{d_c}$. Die Nenner sind bekannt, von den Zählern kennt man $h_t = 9{,}7188848 - 9{,}7188377 = 471$ Einheiten der letzten Dezimale. Man stellt „513“ (U_2) über „471“ (U_1), dann findet man unter d_w (U_2), daß $h_w = 9{,}18$ ist (U_1). Es ist also $\varphi = 27°\ 37'\ 49''$, 18. Ohne die Zungenstellung zu verändern, liest man unter $d_s = 402$ (U_2) auf U_1 ab, daß $h_s = 369$ ist, unter d_c, daß $h_c = -102$ ist. Es ergibt sich $lg\ sin\ \varphi = 9{,}6662611 + 0{,}0000369 = 9{,}6662980$ ist; $lg\ cos\ \varphi = 9{,}9474132$.

$lg\,(y_2 - y_1) = \mathbf{2{,}4447441}$	$lg\,(x_2 - x_1) = \mathbf{2{,}7258593}$
$lg\ \sin\varphi = 9{,}6662980$	$lg\ \cos\varphi = 9{,}9474132$
$lg\ s = 2{,}7784461$	$lg\ s = 2{,}7784461$

Es ist $lg\ 600{,}40 = 2{,}7784407$; $lg\ 600{,}41 = 2{,}7784479$. Die Tafeldifferenz ist also 72, die Abweichung von $lg\ s$ $461 - 407 = 54$, die Interpolation $\frac{54}{72}$ liefert als sechste und siebente Stelle 75, also $s = 600{,}4075$ m.

Beispiel 24. Die Flächen der Erdteile sind, in Millionen Quadratkilometer angegeben: Europa 9,97, Asien 44,18, Afrika 29,82, Nordamerika 24,20, Südamerika 17,78, Australien und Ozeanien 8,90, Antarktis 14,00. Wieviel Prozent kommen auf die einzelnen Gebiete?

Lösung: Die Gesamtfläche beträgt $148{,}85 \cdot 10^6$ km². Es ist $F : 100 = a : x$, wenn F die Gesamtfläche, a die Fläche eines Erdteils und x der zugehörige Prozentsatz ist. Man erhält der Reihe nach 6,7 %, 29,7 %, 20,0 %, 16,3 %, 11,9 %, 6,0 %, 9,4 %.

10. Multiplikation und Division mit größerer Genauigkeit

Geodätische Rechnungen erfordern häufig eine größere Genauigkeit, als sie der Rechenschieber unmittelbar liefern kann. Hat man keine Rechenmaschine zur Hand, so ist man auf elementare Rechenverfahren angewiesen. Diese aber können durch den Rechenstab wesentlich erleichtert und verkürzt werden, auch werden die beim Kopfrechnen möglichen Fehler zum großen Teil ausgeschaltet.

a) Das große Einmaleins

Soll eine zweistellige Zahl mit einer einstelligen multipliziert werden, so ist das Ergebnis zwei- oder dreistellig. Führt man die Multiplikation mit dem Rechenschieber aus, so muß man oft die dritte Stelle des Ergebnisses schätzen. Man kann sie aber genau angeben, wenn man das Einmaleins benutzt. So ist z. B. 87 · **7** = **609** (nicht 608 oder 610), weil 7 · **7** = **49** ist, 92 · 6 = 55**2** (2 · 6 = 1**2**). Der Rechenschieber liefert also eine *genaue* Multiplikationstabelle, die von 1 · 1 bis 9 · 99 geht. Man kann dasselbe Verfahren auch sonst anwenden, wenn das Produkt der beiden ganzen Zahlen den Wert 2000 nicht überschreitet. So ist 53 · 36 = 1908 (3 · 6 = 18), 252 · 6 = 1512 u. s. f. Für 73 · 85 aber liefert der Rechenschieber das Ergebnis 6200; man kann hier nicht mehr unterscheiden, ob es durch Abrundung von 6195 oder 6205 entstanden ist.

b) Multiplikation

Es soll eine mehrstellige Zahl, z. B. 523687, mit **7** multipliziert werden. Wie man auf gewöhnliche Weise verfährt, zeigt das Schema *a*. Natürlich führt man praktisch die Addition im Kopf aus, so daß man sofort das Resultat erhält.

a)

```
523687 · 7
----------
     49
    56
   42
  21
 14
35
-------
3665809
```

Benutzt man den Rechenschieber, so teilt man die größere Zahl, von rechts nach links gehend, in Gruppen von je zwei Ziffern ein und behandelt jede für sich. Da ihr Wert bei dem Übergang von einer Gruppe auf die nächste auf das Hundertfache wächst, so muß man jedes neue Teilergebnis immer um *zwei* Stellen nach links verschieben, man erhält das Schema *b*. Hierbei kann der einstellige Faktor, abgesehen von einem eventuellen Zungenrückschlag, fest eingestellt werden.

b)

```
52'36'87 · 7
------------
    609
  252
364
-------
3665809
```

Auch wenn der zweite Faktor zweistellig ist, kann man ebenso verfahren, vorausgesetzt, daß kein Teilprodukt größer als 2000 ist, was man durch Abschätzen leicht feststellt. Das ist sicher der Fall, wenn der kleine Faktor unter 20 liegt. So erhält man z. B.

```
52'36'87 · 19      2'42'35 · 42
-------------      ------------
   1653               1470
  684               1764
988                 84
-------            -------
9950053            1017870
```

Ist der zweite Faktor größer, so behandelt man jede Zahl des ersten Faktors einzeln, ebenso, wenn der zweite Faktor eine dreistellige Zahl ist, die unter 200 liegt, z. B.:

```
24235 · 87         81683 · 136
----------         -----------
    435                 408
   261               1088
  174                816
 348                136
174                1088
-------            --------
2108445            11108888
```

Man kann auch den zweiten Faktor in einzelne Zahlen aufspalten und den ersten in passende Gruppen zerlegen. Es sei $x = 24235 \cdot 87$

```
24'235 · 8       24'235 · 7
----------       ----------
  1880             1645
192              168
------           ------
193880           169645

193880
 169645
-------
2108445
```

Diese Teilrechnungen lassen sich auch zusammenfassen, wobei die Verwendung karierten Papiers zweckmäßig ist:

```
24'235 · 8'7
------------
   1645
 168
  1880
192
-------
2108445
```

Die Erweiterung des Verfahrens auf Zahlen mit beliebig viel Stellen wird keine Schwierigkeiten bereiten. Um es mit Vorteil anzuwenden, muß man es erst an einer Reihe von Beispielen üben. Man rechne etwa Beispiel 6 nach dieser Methode durch.

c) Division

Ein Pariser Fuß beträgt 324,8394 mm. Er zerfällt in 12 Zoll, ein Zoll in 12 Linien. Wie lang ist ein Zoll und eine Linie?

Lösung: Bei der Ausrechnung muß man dauernd mit 12 multiplizieren. Man stellt daher „1“ (U_2) über „12“ (U_1). Jetzt sucht man auf U_1 „324“ auf und sieht, daß darüber auf U_2 genau 27 steht. Das erste Teilergebnis ist 27; 12 · 27 ist 324. Nach der Subtraktion nimmt man die zwei nächsten Zahlen des Dividenden, 83; 83 : 12 liegt zwischen 6 und 7; 12 · 6 = 72. Durch Subtraktion und Herunterholen der nächsten Zahlengruppe kommt man auf 1194; 1194 : 12 liegt zwischen 99 und 100; 12 · 99 = 1188. 600 : 12 = 50, somit entsteht das oben angeschriebene Ergebnis. Es muß wieder durch 12 geteilt werden.

```
= 2 7',0 6'9 9'5 0
3 2 4,8 3 9 4 : 1 2
3 2 4
-----
    8 3
    7 2
    -------
    1 1 9 4
    1 1 8 8
    -----------
          6 0 0
```

```
= 2,2'5 5'8 2'9 2
2 7 0 6 9 9 5 0 : 1 2
2 6 4
-----
  6 6 9
  6 6 0
  -------
    9 9 5
    9 8 4
    ---------
     1 1 0 0
     1 1 0 4
    ---------
```

Ein Zoll ist also 27,069950 mm, eine Linie 2,2558292 mm. Man kann ebenso jeden beliebigen Dividenden durch eine beliebige ein- oder zweistellige Zahl teilen. Ist der Divisor mehrstellig, so kann man zwar entsprechend vorgehen, doch ist das umständlich. Manchmal kann man sich aber durch einen kleinen Kunstgriff helfen.

Beispiel 26. Wie groß ist der Radius einer Kugel, deren Umfang genau 40000 km beträgt?

Lösung: $2\,r\pi = 40000$, $r = \frac{20000}{3{,}14159265\,..}$. Die Rechnung wäre sehr langwierig. Führt man aber für π den sehr genauen Näherungswert $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\,..$ ein — er entspricht einer siebenstelligen Tafel — so ist $r = \frac{2260000}{355}$. Da der Divisor unbequem ist, so erweitert man mit 2 und erhält $r = \frac{452000}{71}$.

```
3',1'4'1'5'9'2'9' . . .
355 : 113
339
---
 160
 113
 ---
  470
  452
  ---
   180
   113
   ---
    670
    565
    ----
    1050
    1017
    ----
     330
     226
     ----
     1040
```

(„1“ (U_2) über „113“ (U_1))

Man kann hier nur je *eine* Stelle des Resultats gewinnen, es wird $r = 6366{,}197$ km.

Rechnet man dieselbe Aufgabe mit dem Näherungswert $\pi \approx \frac{22}{7}$ durch, so ist das Verfahren viel einfacher, das Ergebnis aber ungenauer. Man erhält $r = 6363{,}636$. Der Fehler beträgt 0,04 %.

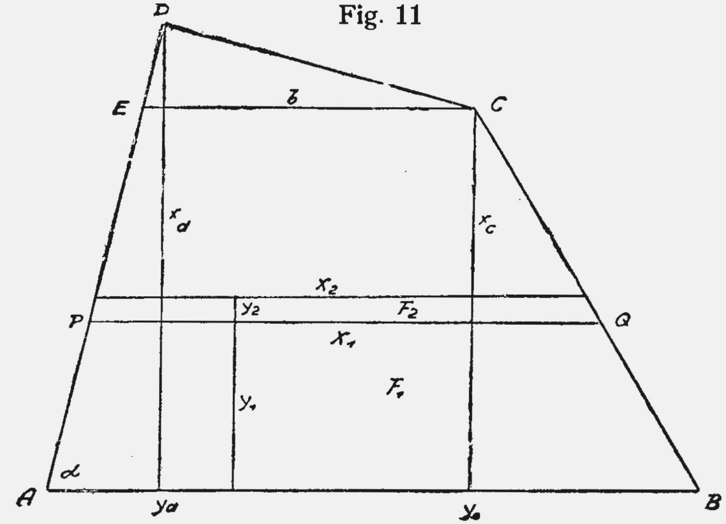
Ganz allgemein kann man bei Verwendung des Rechenschiebers drei elementare Teilrechnungen sparen. Will man etwa im vorigen Beispiel $\frac{20000}{\pi}$ auf fünf Stellen genau haben, so rechnet man zunächst zwei Stellen aus:

```
20000,00 : 3,14159 = 63
18849 54
---------
 1150 460
  942 477
---------
  207 983
```

Der Rechenschieber gibt jetzt für $\frac{2079830}{314159}$ die Ziffern 662, also ist das Ergebnis 6366,2 km.

Beispiel 27. Ein viereckiges Grundstück A B C D hat die Seite A B $= a = 174{,}55$ m, ferner ist B C = 121,26 m, C D = 85,425 m. D A = 129,61 m, $\sphericalangle A = 76^\circ\,40' = 85^g, 18^c,5$. Durch eine Parallele zu A B soll eine Fläche von F = 8000 m². abgeschnitten werden. Wie ist die Parallele zu ziehen?

Fig. 11



Lösung (Fig. 11): Der Abstand der Parallelen von A B, y, ist gesucht. Wäre die Fläche F ein Rechteck, so müßte seine Höhe, y_1, der Gleichung $a \cdot y_1 = F$ genügen, es wäre also $y_1 = \frac{8000}{174{,}55}$;

```
80000 : 17455 = 4 . . .
69820
-----
10180
```

Mit dem Rechenschieber ergibt 10180 : 17455 die Ziffern 583, also ist $y_1 =$ 45,83 m. Zieht man in diesem Abstand die Parallele P Q, so stellt man durch Messung oder Rechnung fest, daß sie $x_1 = 136{,}33$ m ist. Die Fläche F_1 = A B Q P ist daher $\frac{1}{2}(a + x_1)\,y_1 = \frac{1}{2} \cdot 310{,}88 \cdot 45{,}83 = 155{,}44 \cdot 45{,}83 = 7124{,}2$ m². Auch bei der Ausführung dieser Multiplikation hilft der Rechenschieber. F_1 ist also um $8000 - 7124{,}2 = 875{,}8$ m² zu klein. Wir fassen die Differenz wieder als Rechteck mit der Seite x_1 und der Höhe y_2 auf; $y_2 = \frac{875{,}8}{136{,}33} = 6{,}425$ (einfache Division mit dem Rechenschieber). Die im Abstande y_2 zu PQ gezogene Parallele ist $x_2 =$ 130,97 m lang. Die Zusatzfläche F_2 ist $\frac{1}{2}\,y_2\,(x_1 + x_2) = 3{,}2125 \cdot 267{,}30 = 859$ m² (einfache Multiplikation genügt). F_2 ist um 16,8 m² zu klein. Fährt man in derselben Weise fort, so ist $y_3 = \frac{16{,}8}{130{,}97}$; $y_3 = 0{,}128$ m, $x_3 = 130{,}86$ m. $F_3 = \frac{1}{2}\,y_3\,(x_2 + x_3) = 0{,}064 \cdot 261{,}83 = 16{,}8$ m². Dies ist der verlangte Wert. Somit muß die Parallele zu A B im Abstand $y = y_1 + y_2 + y_3 = 52{,}38$ m gezogen werden, ihre Länge beträgt 130,86 m.

11. Das Quadrieren

Will man die Zahl a ins Quadrat erheben ($x = a^2$), so kann man dies natürlich mit U_1 und U_2 ausführen ($x = a \cdot a$). Bequemer, aber nicht ganz so genau, ist die Benutzung der Skala Q. Ihr erster Teil („1“ bis „10“) ist genau so konstruiert wie U_1, nur im Verhältnis 1 : 2 verkleinert. Der zweite („10“ bis „100“) unterscheidet sich von dem ersten nur dadurch, daß an dessen Ziffern eine Null angehängt ist; beim Ablesen erhält man Zahlen, die zehnmal so groß sind.

Sucht man „a“ auf U_1 auf, so findet man mit dem Läuferstrich M genau darunter auf Q den Wert „a^2“. Man prüft dies zunächst an Zahlen, deren Quadrat durch Kopfrechnen leicht gefunden werden kann: $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ (nicht 1,6!), $9^2 = 81$. Man findet ferner $2{,}16^2 = 4{,}67$; $3{,}162^2 = 10{,}0$; $6{,}58^2 = 43{,}3$. Liegt a außerhalb des Bereiches von 1 bis 10, so liefert der Rechenschieber wohl die Ziffern von a^2, nicht aber die Kommastellung. Diese wird durch Abschätzen ermittelt. Z. B. ist $21{,}6^2 = 467$, denn $20 \cdot 20 = 400$; $658^2 = 433\,000$, denn $600 \cdot 700 = 420\,000$; $0{,}135^2 = 0{,}01822$, denn $0{,}1^2 = 0{,}01$ usw. Man kann auch bei der gegebenen Zahl a eine Kommaverschiebung vornehmen, um sie in den Zahlenraum 1 bis 10 zu bringen. Dann muß man bei dem abgelesenen Ergebnis das Komma um die doppelte Anzahl von Stellen in entgegengesetzter Richtung verschieben. Ist z. B. $a = 0{,}0249$, so muß man das Komma *zwei* Stellen nach *rechts* rücken, man erhält 2,49. Das Quadrat dieser Zahl ist 6,20. Soll a^2 gefunden werden, so muß das Komma *vier* Stellen nach *links* wandern; $a^2 = 0{,}000620$. Bei $a = 249$ ist es genau umgekehrt, hier ist $a^2 = 62\,000$.

12. Die Quadratwurzel

Ist $x = \sqrt{a}$, so ist $x^2 = a$. Man sucht hier a auf Q auf, dann findet man x auf U_1. Liegt a zwischen 1 und 10, so benutzt man die linke Hälfte von Q, liegt a zwischen 10 und 100, die rechte. Z. B. ist $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{5{,}2} = 2{,}28$, $\sqrt{10} = 3{,}162$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{27{,}5} = 5{,}24$, $\sqrt{68{,}352} = 8{,}27$.

Liegt der Radikand a außerhalb der Zahlenspanne 1 bis 100, so teilt man ihn, vom Komma ausgehend, nach links und rechts in Gruppen von je zwei Zahlen. Enthält die Gruppe, welche am weitesten links steht, *eine* Ziffer, so muß man bei der Einstellung die *linke* Hälfte von Q benutzen, treten *zwei* Ziffern auf, die rechte. Im Ergebnis muß man die Hälfte der Kommaverschiebungen vornehmen, jeder Gruppe von a entspricht eine Zahl von x. Es sei z. B. $x = \sqrt{4386} = \sqrt{43'86}$. Wir benutzen die rechte Hälfte von Q und finden $\sqrt{43{,}86} = 6{,}62$; $\sqrt{4386} = 66{,}2$; $\sqrt{0{,}00035} = \sqrt{0{,}'00'03'50}$. Es ist $\sqrt{3{,}5} = 1{,}87$; $x = 0{,}0187$. Eine Kontrolle hat man sofort, wenn man x^2 bildet und die im vorigen Abschnitt angegebene Regel über die Kommaverschiebung beachtet.

Beispiel 28. Die Koordinaten des Punktes P_1 seien $x_1 = 15{,}72$ m, $y_1 = 6{,}28$ m, die des Punktes P_2: $x_2 = 33{,}65$ m; $y_2 = 22{,}00$ m. Wie lang ist die Strecke $s = P_1 P_2$?

Lösung (Fig. 12): Nach dem Pythagoras ist $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 \; y_1)^2} = \sqrt{17{,}93^2 + 15{,}72^2} = \sqrt{321 + 247} = \sqrt{568} = 23{,}85$ m.

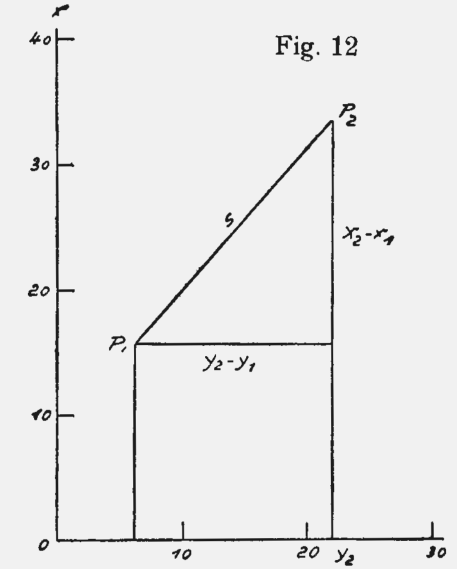


Fig. 12

Beispiel 29. Wie groß ist die Begrenzung des in Fig. **11** gezeichneten Grundstücks? Die Koordinaten der Eckpunkte sind $x_A = 0$, $y_A = 0$; $x_B = 0$, $y_B = 174{,}55$ m; $x_C = 104{,}12$ m, $y_C = 112{,}40$ m; $x_D = 127{,}09$; $y_D = 30{,}12$ m.

Lösung: AB $= 174{,}55$ m; BC $= \sqrt{104{,}12^2 + 62{,}15^2} = \sqrt{10840 + 3860} = \sqrt{14700} = 121{,}3$ m; CD $= \sqrt{22{,}97^2 + 82{,}28^2} = \sqrt{528 + 6770} = \sqrt{7298} = 85{,}4$ m; DA $= \sqrt{127{,}09^2 + 30{,}12^2} = \sqrt{16160 + 907} = \sqrt{17067} = 130{,}6$ m. Die gesamte Begrenzung beträgt 511,85 m.

Beispiel 30. Wie lang ist die Begrenzung des in Fig. 5 gezeichneten Grundstücks?

Lösung: Man rechne wie im vorigen Beispiel. Zur Kontrolle der Genauigkeit können die folgenden Zahlen dienen, die mit einer fünfstelligen Tafel ermittelt wurden: $s_0 = 29{,}943$ m, $s_1 = 38{,}266$ m, $s_2 = 17{,}409$ m, $s_3 = 20{,}490$ m, $s_4 = 25{,}778$ m, $s_5 = 17{,}995$ m, $s_6 = 17{,}513$ m, $s_7 = 35{,}855$ m, $s_8 = 17{,}084$ m, $s_9 = 40{,}469$ m, also $U = 260{,}792$ m.

Beispiel 31. Zur Sicherung der Messungen wurden in Fig. 5 zwei Einbände gemacht. Der Punkt $x = 0$, $y = 25{,}0$ wurde mit dem rechten Eckpunkt der Fläche II und der Punkt $x = 0$, $y = 55{,}0$ mit dem linken Eckpunkt von VIII verbunden. Wie lang müssen diese Streben sein, wenn die Messungen richtig sind?

Lösung: Die erste Strebe muß $\sqrt{(48{,}74 - 25{,}0)^2 + 38{,}22^2} = \sqrt{564 + 1460} = \sqrt{2024} = 45{,}0$ m sein, die zweite $\sqrt{(55{,}00 - 42{,}68)^2 + 37{,}07^2} = \sqrt{152 + 1374} = \sqrt{1526} = 39{,}1$ m.

Beispiel 32. Auf die Gerade M N, deren Lage bekannt ist, soll von dem gegebenen Pnkte P das Lot gefällt werden. Man hat aber keinen Winkelspiegel oder dergleichen zur Hand. Wie hilft man sich?

Lösung: Man zieht eine Gerade PA_0 nach Augenmaß (Fig. 13), die einigermaßen der Anforderung entspricht. Dann steckt man auf M N die (genügend große)

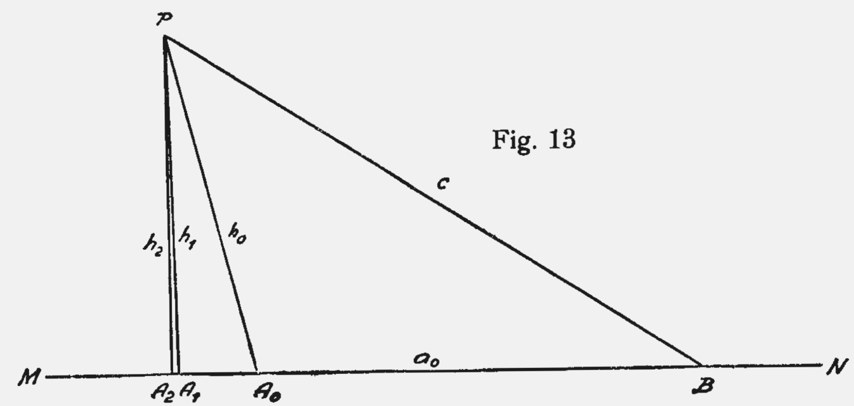


Fig. 13

Strecke AB_0 ab, ihre Länge sei a_0. B wird mit P verbunden, man mißt BP=c, sowie $A_0P = h_0$. Ist $\sqrt{c^2 - h_0^2} = a_0$, so hat man in A_0 zufällig den richtigen Fußpunkt der Lotes gefunden. Erhält man für die Wurzel einen anderen Wert, a_1, so trägt man diesen von B aus bis zum Punkte A_1 ab und mißt $A_1P = h_1$. Ist. $\sqrt{c^2 - h_1^2} = a_1$, so ist A_1 der richtige Fußpunkt, wenn nicht, so wiederholt man das Verfahren.

Es sei z. B. $a_0 = 120$ m, $c = 170$ m, $h_0 = 95$ m. Dann ist $a_1 = \sqrt{c^2 - h_0^2} = \sqrt{28900 - 9025} = 141$ m. Diese Strecke trägt man von B aus ab (bis A_1) und mißt $A_1P = h_1 = 92{,}24$ m. Dann ist $a_2 = \sqrt{c^2 - h_1^2} = \sqrt{28900 - 8500} = 142{,}8$. Man trägt a_2 von B aus bis A_2 ab und bestimmt $h_2 = A_2P = 92{,}22$. Für $a_3 = \sqrt{c^2 - h_2^2}$ erhält man wieder 142,8. A_2 ist also der Fußpunkt des Lotes. In Fig. 13 ist PA_0 absichtlich ganz ungenau angenommen worden.

Soll auf $AB = a$ in A die Senkrechte errichtet werden, so zieht man durch B eine beliebige Gerade BN und konstruiert in A die ungefähre Senkrechte h_0. Sie schneide BN in P_0. Dann berechnet man $c_1 = \sqrt{a^2 + h_0^2}$ und trägt c_1 von B aus auf BN ab, Endpunkt P_1. Man mißt $AP_1 = h_1$ und berechnet $c_2 = \sqrt{a^2 + h_1^2}$ u. s. f. Die Punkte $P_0, P_1, P_2 \ldots$ nähern sich schnell dem Punkt P, in dem die Senkrechte die Gerade BN schneidet.

B e i s p i e l 33. Man kann Beispiel 27 noch in anderer Weise behandeln. Durch C (Fig. 11) wird die Parallele zu AB, CE gezogen und gemessen. Sie ist in unserem Fall $b = 87{,}72$ m. Dann ist $x^2 = a^2 - \frac{2(a-b) \cdot F}{x_c}$, $y = \frac{a-x}{a-b} \cdot y_c$, also hier $x^2 = 174{,}55^2 - \frac{2 \cdot 86{,}83 \cdot 8000}{104{,}12} = 30500 - 13340 = 17160$; $x = 131{,}0$ m, $y = \frac{43{,}55 \cdot 104{,}12}{86{,}83} = 52{,}4$ m. Eine genauere Durchführung der Rechnung ergibt die in Beispiel 27 angegebenen Zahlen.

B e i s p i e l 34. Eine Strecke ist zu 58,17 m mit dem mittleren Fehler 0,052 m gemessen, eine zweite ist 117,58 m, ihr mittlerer Fehler beträgt 0,134 m. Wie groß ist die Summe beider Strecken?

L ö s u n g : $175{,}75 \pm$ m. Nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ist $m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{0.052^2 + 0{,}134^2} = \sqrt{0{,}002704 + 0{,}01796} = \sqrt{0{,}020664} = 0{,}1438$. $x = 175{,}75 \pm 0{,}144$ m.

B e i s p i e l 35. Wie groß ist der mittlere Fehler der aus einer vierstelligen Tafel ermittelten Logarithmen?

L ö s u n g : Wir vergleichen die vierstellige Tafel mit einer siebenstelligen, deren Angaben wir als genau annehmen. Als Fehler der vierstelligen, v, bezeichnen wir die Differenz zwischen dem wahren Wert und dem angenäherten. Um nur unabhängige Zahlen zu vergleichen, benutzen wir die Primzahlen p von 3 an.

Beschränken wir uns auf die zehn ersten, so erhalten wir, wenn wir die Differenzen in Einheiten der vierten Dezimale messen, die Tabelle:

p	v	v^2	p	v	v^2
3	+ 0,213	0,0454	17	+ 0,489	0,2391
5	— 0,300	0,0900	19	— 0,474	0,2247
7	— 0,020	0,0004	23	+ 0,278	0,0773
11	— 0,073	0,0053	29	— 0,020	0,0004
13	+ 0,434	0,1884	31	— 0,383	0,1467

Es ist also $[v^2] = 1{,}0177$, $m = \sqrt{0{,}1077} = 0{,}328$. Nimmt man 30 Primzahlen, so ist $[v] = 2{,}3508$, $m = \sqrt{0{,}0784} = 0{,}280$. Da der kleinste Fehler einer vierstelligen Tafel 0, der größte 0,5 Einheiten der letzten Dezimale ist, so ist das Ergebnis einleuchtend.

B e i s p i e l 36. Die wiederholten Messungen eines Winkels ergeben die unter l aufgeführten Werte. Wie groß ist der wahrscheinlichste Wert, sein mittlerer Fehler und der mitttlere Fehler *einer* Beobachtung?

l	v	v^2
53° 17′ 26″	1,7	2,89
33″	—5,3	28,1
22″	+5,7	32,5
30″	—2,3	5,29
35″	—7,3	53,3
19″	+8,7	75,7
29″	—1,3	1,69
Summe 194	$[v^2]$ =	199,5

L ö s u n g : Da alle Winkel mit 53° 17′ beginnen, so gilt dasselbe auch für den Mittelwert. Die Summe der Sekunden, 194, durch die Zahl der Beobachungen (7) dividiert, ergibt 27″, 7, also ist das Mittel 53° 17′ 27″, 7. Die Abweichungen der Beobachtungen stehen unter v. Mit dem Rechenschieber findet man ihre Quadrate (v^2). Deren Summe ist $[v^2] = 199{,}5$. Der mittlere Fehler *einer* Beobachtung ist $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{199{,}5}{6}} = 5''{,}77$, der mittlere Fehler des Mittelwertes beträgt $M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{199{,}5}{42}} = 2''{,}18$; $l = 53° \, 17' \, 28'' \pm 2''$.

B e i s p i e l 37. Man löse dieselbe Aufgabe für die Winkel $112^g, 3433$; $112^g, 3416$; $113^g, 5134$; $112^g, 3421$; $112^g, 3428$; $112^g, 3424$.

L ö s u n g : Bei der dritten Messung liegt offenbar ein grober Fehler vor, sie wird deshalb ausgeschaltet. Man erhält als Mittel $112^g{,}34244$. Es ist $[v^2] = 73{,}96 + 70{,}56 + 11{,}56 + 12{,}96 + 0{,}16 = 169{,}20$; $m = \sqrt{\frac{169{,}20}{4}} = 6{,}5^{cc}$, $M = \sqrt{\frac{169{,}20}{20}} = 2{,}9^{cc}$; $l = 112^g 34^c 24^{cc}{}_5 \pm 3^{cc}$.

13. Das rechtwinklige Dreieck

Es seien a und b die Katheten, c die Hypotenuse. Die Aufgabe, aus zwei Stücken das dritte zu finden, kam in den bisher behandelten Beispielen oft vor. Sie wurde in der Form $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ gelöst. Hier sollen einige Ergänzungen ihren Platz finden.

a) Es sei a und b gegeben, c gesucht, a sei die größere Kathete. Stellt man „b" (U_2) über „a" (U_1), (Stellung I), so steht unter „1" (U_2) auf U_1 „$\frac{a}{b}$". Unmittelbar darunter findet man auf Q „$\frac{a^2}{b^2}$". Diese Zahl

Fig. 14

		I	II	III	
	1	b	1	b	U_2
1	$\frac{a}{b}$	a	$\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$	$c = \sqrt{a^2+b^2}$	U_1
1	$\frac{a^2}{b^2}$		$1+\frac{a^2}{b^2}$	a^2+b^2	Q

liest man (unter Benutzung der Kommastellung) ab, addiert im Kopf 1 dazu und stellt das Ergebnis, $1 + \frac{a^2}{b^2}$ auf Q durch den Läuferstrich fest (Stellung II). Darüber liegt auf U_1 „$\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$". Ohne diese Zahl abzulesen, multipliziert man sie mit b, indem man die Zunge so verschiebt, daß ihre Anfangszahl „1" unter dem Läuferstrich liegt. Geht man auf

U_2 bis „b“ weiter (Stellung III), so findet man darunter auf U_1 den Wert $b\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{a^2+b^2} = c$. Ist z. B. $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, so findet man $\frac{a^2}{b^2} = 3{,}06$ auf Q. Stellt man „1“ (U_2) über „4,06“ (Q), so findet man unter „4“ (U_2) auf U_1, daß $c = 8{,}06$ cm ist.

b) Die Hypotenuse c ist größer als die größere Kathete a, es sei $c = a + x$. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist dann $(a+x)^2 = a^2+b^2$; $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + b^2$; $x(2a + x) = b^2$; $x = \frac{b^2}{2a+x}$. Wir lösen diese Gleichung durch allmähliche Annäherung. Da x klein sein wird, so nehmen wir als ersten Näherungswert $x_0 = 0$ an. Dann ist eine bessere Annäherung $x_1 = \frac{b^2}{2a}$, eine noch bessere $x_2 = \frac{b^2}{2a + x_1}$ usw. In unserem Falle ist $x = \frac{16}{14+x}$. Für $x_0 = 0$ erhält man $x_1 = \frac{16}{14} = 1{,}143$. Jetzt folgt $x_2 = \frac{16}{15{,}143} = 1{,}056$; $x_3 = \frac{16}{15{,}056} = 1{,}063$, $x_4 = \frac{16}{15{,}063} = 1{,}062$. Da man für x_5 dieselbe Zahl erhält, so ist sie endgültig; $c = 8{,}062$. Wir haben eine Stelle gegenüber dem vorigen Verfahren gewonnen. Die Methode ist um so schneller und genauer, je kleiner b ist. Man bilde selbst einfache Beispiele und rechne einige frühere Aufgaben nach diesem Verfahren noch einmal.

c) Ist die Hypotenuse c und eine Kathete a gegeben, so ist $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Hierfür kann man schreiben $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$. Wenn a groß ist, also nahe an c herankommt, so ist diese Methode nicht nur bequem, sondern gibt auch eine viel größere Genauigkeit.

Beispiel 38. Eine steil ansteigende Straße verbinde die Punkte A und B. Die Messung ergibt für AB die Länge $c = 562{,}42$ m, der horizontale Abstand ist nach der Karte $a = 557{,}00$ m. Um wieviel m liegt B höher als A?

Lösung: $h = \sqrt{c^2 - a^2}$. Die direkte Rechnung ergibt $h = \sqrt{316000-310000} = \sqrt{6000} = 77{,}5$ m. Genauer ist $h = \sqrt{1119{,}42 \cdot 5{,}42} = \sqrt{6070} = 77{,}9$ m. Die Steigung ist $\frac{100 \cdot 77{,}9}{557} = 14\,\%$.

Beispiel 39. Nach Bessel ist ein Erdmeridian eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 6377397{,}15$ m, $b = 6356078{,}96$ m. Welchen Abstand haben ihre Brennpunkte vom Erdmittelpunkt?

Lösung: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Die direkte Berechnung würde die Genauigkeit des Rechenschiebers übersteigen. Setzt man aber $e = \sqrt{12\,733\,476{,}11 \cdot 21318{,}19}$, so liefert er $e = \sqrt{271\,500\,000\,000} = 521000$ m $= 521$ km, rund 1/12 des mittleren Erdradius.

d) Ist b klein gegen c, so ist $a = \sqrt{c^2 - b^2} = c\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}$, also nach dem binomischen Satz $a \approx c\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{c^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^2\right]$. Das letzte Glied kann meist vernachlässigt werden. Man bilde selbst Zahlenbeispiele.

14. Genauere Berechnung der Quadratzahlen und Quadratwurzeln

Ist die Genauigkeit, mit der man a^2 auf Q [unter „a“ (U_1)] erhält, nicht ausreichend, so kann man $a \cdot a$ mit U_1 und U_2 bilden. Nach den in Abschnitt 10 (S. 15) angegebenen Methoden kann man die Präzision beliebig steigern. Auch kann man a in zwei Summanden zerspalten, $a = a_0 + h$. Dann ist $a^2 = a_0^2 + 2a_0 h + h^2$. Z. B. ist $364^2 = (360 + 4)^2 = 129600 + 2880 + 16 = 132496$. Zur Berechnung der Teilausdrücke genügt bei passender Anordnung der Rechenstab.

Ist $x = \sqrt{a}$, so kann man mit dem Rechenschieber nach Abschnitt 12 leicht einen Näherungswert x_0 finden. Setzt man $x = x_0 + h$, so ist $x^2 = a = x_0^2 + 2x_0 h + h^2$, also $h = \frac{a - x_0^2}{2x_0 + h}$. Diese Gleichung wird nach demselben Näherungsverfahren wie im vorigen Abschnitt gelöst. Man muß aber darauf achten, daß hier x_0^2 scharf bestimmt werden muß. Es war dort $\sqrt{a^2+b^2}$ für $a = 7$ cm, $b = 4$ cm zu bestimmen, also $x = \sqrt{65}$. Der Rechenschieber liefert den Näherungswert $x_0 = 8{,}06$; $x_0^2 = 64{,}9636$. Es ist also $h = \frac{0{,}0364}{16{,}12 + h}$. Für $h = 0$ erhält man $h_1 = \frac{0{,}0364}{16{,}12} = 0{,}002258$, $h_2 = \frac{0{,}0364}{16{,}122258} = 0{,}002258$, also $x = 8{,}062258$. (Genauer Wert $8{,}062257748\ldots$)

In Beispiel 28 ist $x = \sqrt{17{,}93^2 + 15{,}72^2}$
$17{,}93^2 = (18 - 0{,}07)^2 = 324 - 2{,}52 + 0{,}0049 = 321{,}4849$
$15{,}72^2 = (16 - 0{,}28)^2 = 256 - 8{,}96 + 0{,}0784 = 247{,}1184$, also $x = \sqrt{568{,}6033}$. $x_0 = 23{,}8$; $x_0^2 = 566{,}44$; $h = \frac{2{,}1633}{47{,}6 + h}$; $h_1 = 0{,}0454$; $h_2 = \frac{2{,}1633}{47{,}6454} = 0{,}0454$; $x = 23{,}8454$ cm.

Man prüfe die in Beispiel 30 gemachten Angaben. Auch das in 13 d angegebene Verfahren läßt sich benutzen.

15. Kehrwerte

Der Kehrwert oder reziproke Wert der Zahl a ist $\frac{1}{a}$. Zu seiner Berechnung benutzt man die Skala R (Seitenkante), die mit Q korrespondiert. Der senkrechte Strich des Läuferfensters ist die (geknickte) Fortsetzung des Mittelstrichs M. Die Skala R ist genau so konstruiert wie Q, nur verläuft sie von rechts nach links. Man kann dies leicht mit einem Papierstreifen bestätigen, auf dem man die Abstände „1“ bis „2“ usw. von der einen Teilung auf die andere überträgt.

Sucht man „a“ auf Q auf, so steht darunter die Ziffernfolge von $\frac{1}{a}$ auf R und umgekehrt. Z. B. steht unter „4“ (Q) auf R „25“, denn $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Über „8“ (R) findet man 12,5 auf Q, denn $\frac{1}{8} = 0{,}125$. Die Kommastellung wird auch hier durch Abschätzen festgestellt. Den Zusammenhang der Skalen U_1, Q, R gibt Fig. 15 wieder. Aus ihr ersieht man, wie die in der Geodäsie öfter auftretenden Ausdrücke $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ durch *eine* Einstellung gefunden werden.

Fig. 15

U_1	a	$\sqrt{b}$	$\frac{1}{\sqrt{c}}$
Q	a^2	b	$\frac{1}{c}$
R	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{b}$	c

Beispiel 40. Ein Pariser Fuß ist 0,325 m. Wie groß ist 1 m in Pariser Fuß ausgedrückt?

Lösung: $1\ \text{m} = \frac{1}{0{,}325} = 3{,}08$ Pariser Fuß. In der folgenden Tabelle, die man prüfen möge, sind in der zweiten Zeile Maße angegeben, die denen der ersten Tabelle gleich sind. Man bestimme umgekehrt, wieviel Maßeinheiten der ersten Zeile auf eine der zweiten kommen. Die Ergebnisse stehen in der dritten Zeile.

1 Par. Fuß	1 Yard	1 engl. Meile	1 Acre	1 Gallone	1 $
0,325 m	0,914 m	1,609 km	40,47 a	4,546 l	4,17 DM
3,08 Par Fuß	1,094 Yard	0,621 Meilen	0,0247 Acre	0,220 Gallonen	0,240 $

Beispiel 41. Die Linse eines Fernrohrs liefert von einem a m vor ihr stehenden Gegenstand ein deutliches Bild in b m Linsenabstand. Wie groß ist ihre Brennweite f?

Lösung: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Ist $a = 1{,}05\ m$, $b = 0{,}30\ m$, so ist $\frac{1}{a} = 0{,}952$, $\frac{1}{b} = 3{,}333$, also $\frac{1}{f} = 4{,}285$, $f = 0{,}233\ m$. Man prüfe die folgende Tabelle.

a	2,42 m	0,45 m	0,352 m	0,205 m	1,53 m	2,00 m
b	0,22 m	0,42 m	0,510 m	1,82 m	0,27 m	0,185 m
f	0,202 m	0,217 m	0,208 m	0,184 m	0,229 m	0,169 m

Die Benutzung der Skala R ist bequemer, als die im Abschnitt 8 beschriebene Methode, da nur der Läufer, nicht, wie dort, die Zunge bewegt werden muß. Jene ist aber ein wenig genauer.

Beispiel 42. Die Brennweite f einer dünnen bikonvexen Linse, deren Begrenzungsflächen die Krümmungsradien r_1 und r_2 haben, ist durch die Formel $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ bestimmt. Darin ist n der Brechungsindex für die betreffende Glassorte. Für die Wellenlänge 5893 Angström (D, gelb) hat leichtes Kronglas den Brechungsexponenten $n = 1{,}5100$, leichtes Flintglas $n = 1{,}6128$. Man prüfe folgende Tabelle:

r_1	30	30	33	33	25	25	42	42	cm
r_2	30	30	70	70	∞	∞	23	23	cm
n	1,5100	1,6128	1,5100	1,6128	1,5100	1,6128	1,5100	1,6128	
f	29,4	24,5	44,0	36,6	49,0	40,8	29,1	24,2	cm

Beispiel 43. Ein Fernrohrobjektiv besteht aus einer bikonvexen Kronglaslinse, deren Brennweite $f_1 = 35$ cm ist und aus einer bikonkaven Flintglaslinse mit der Brennweite $f_2 = -58{,}5$ cm. Wie groß ist die Brennweite dieser Linsenkombination?

Lösung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 0{,}0286 - 0{,}0171 = 0{,}0115$; $f = 87{,}1$ cm. Wählt man ein Okular von $f_0 = 1{,}5$ cm Brennweite, so erzielt man die Vergrößerung $v = \frac{f}{f_0} = 58{,}1$. Man kann das Fernrohr schon für einfache astronomische Beobachtungen verwerten, wenn der Objektivdurchmesser groß genug ist, so daß die Bildschärfe ausreicht.

16. Zusammengesetzte Ausdrücke

Es sollen jetzt die Ausdrücke ab^2, $b\sqrt{a}$, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b}{\sqrt{a}}$ bestimmt werden, wenn a und b bekannte Zahlen sind.

Fig. 16

U_2	1	b
U_1	$\sqrt{a}$	$b\sqrt{a}$
Q	a	ab^2
R	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{ab^2}$

1. Stellt man „1“ (U_2) über „a“ (Q), so bedeckt der Läuferstrich M auf U_1 „$\sqrt{a}$“, auf R „$\frac{1}{a}$“. Wird jetzt M von „1“ (U_2) auf „b“ (U_2) verschoben, so bedeckt er auch auf U_1 eine b-mal so große Zahl wie vorher, man kann hier also $b\sqrt{a}$ ablesen. Darunter steht auf Q das Quadrat, also „ab^2“, auf R „$\frac{1}{ab^2}$“.

Fig. 17

U_2	1	b
U_1	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{b}{\sqrt{a}}$
Q	$\frac{1}{a}$	$\frac{b^2}{a}$
R	a	$\frac{a}{b^2}$

2. Stellt man „1“ (U_2) über „a“ (R), so bedeckt der Läuferstrich M auf Q „$\frac{1}{a}$“, auf U_1 „$\frac{1}{\sqrt{a}}$“. Verschiebt man ihn von „1“ (U_2) auf „b“ (U_2), so bedeckt er auf U_1 „$\frac{b}{\sqrt{a}}$“, auf Q „$\frac{b^2}{a}$“, auf R „$\frac{a}{b^2}$“.

Will man $b\sqrt{a}$ oder $\frac{b}{\sqrt{a}}$ bestimmen, so ist es *nicht* gleichgültig, ob man z. B. „4“ oder „40“ auf Q oder R durch den Läuferstrich überdeckt. Man beachte die Bemerkung über Quadratwurzeln in Abschnitt 12, S. 19. Ob man aber „1“ oder „10“ der Zunge darübersetzt, ist belanglos; man verfährt so, daß die Skala ausreicht.

Beispiel 44. Jede Seite eines Polygons, $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$, werde zweimal gemessen. Die Ergebnisse werden nicht gleich sein, ihre Differenzen seien $d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$. Dann ist der mittlere Fehler *einer* Messung $m = \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$, der mittlere Fehler einer Doppelmessung $m' = \sqrt{\frac{1}{4n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$; m und m' gelten für die (beliebig angenommene) Längeneinheit. Um $\frac{d_1^2}{s_1}$ zu finden, sucht man nach 2. „s_1“ auf R auf, stellt „1“ (U_2) darüber, verschiebt M auf „d_1“ (U_2) und findet das Ergebnis darunter auf Q. Genau so verfährt man mit den andern Teilausdrücken.

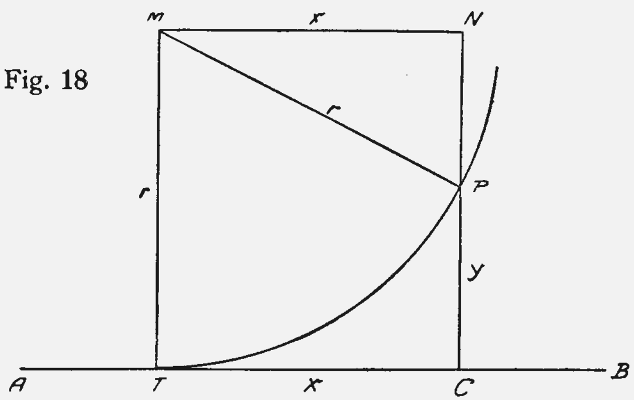
Als Beispiel diene folgende Tabelle:

Nummer	Erste Messung l_1	Zweite Messung l_2	$d = l_1 - l_2$	$\frac{d^2}{s}$
1	170,182 m	170,160 m	+ 22 mm	2,84
2	98,212 m	98,205 m	+ 7	0,50
3	212,715 m	212,733 m	— 18	1,52
4	150,165 m	150,143 m	+ 22	3,22
5	112,346 m	112,382 m	— 36	11,54
6	172,138 m	172,126 m	+ 12	0,84
7	201,805 m	201,821 m	— 16	1,27
8	133,342 m	133,328 m	+ 14	1,47

Es ist also $\left[\frac{d^2}{s}\right] = 23{,}20$; $m = \sqrt{\frac{23{,}20}{16}} = 1{,}204$ mm/m, $m' = \sqrt{\frac{23{,}20}{32}} = 0{,}852$ mm/m.

Beispiel 45. Eine Eisenbahnlinie verläuft zunächst geradlinig (AT) und wird dann zur Vermeidung einer Geländeschwierigkeit als Kreisbogen fortgesetzt.

Fig. 18



Der Krümmungsradius ist $r = 550$ *m*. Wie werden die Punkte des Bogens abgesteckt?

Lösung: Man verlängert *AT* und erhält so die Gerade *TB*. Ein beliebiger Punkt des Bogens sei *P*, *PC* das von ihm auf *AB* gefällte Lot. Wir setzen $TC = x$, $CP = y$; x kann abgesteckt werden, y muß man berechnen. Man hat (Fig. 18) $y = NC - NP = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$. Es ist aber $\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{r^4} \ldots$, also $y \approx \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3}$. Wenn x verhältnismäßig klein gegen r ist, so können die weiteren Glieder der Reihenentwicklung vernachlässigt werden. Setzt man $\frac{x^2}{2r} = y_1$, so ist $y_2 = \frac{x^4}{8r^3} = \frac{y_1^2}{2r}$; $y \approx y_1 + y_2$. Es wird hier y_2 ebenso aus y_1 gefunden, wie y_1 aus x. Es sei z. B. $x = 15$ m, also $y_1 = \frac{15^2}{1100}$, $y_2 = \frac{y_1^2}{1100}$. Man stellt „1" (U_2) über „11" (R), setzt den Läuferstrich *M* auf „15" (U_2) und liest auf *Q* ab, daß $y_1 = 0{,}205$ *m* ist. Ohne die Einstellung der Zunge zu ändern, bringt man *M* auf „205" (U_2) und findet auf *Q*, daß $y_2 = 0{,}0000380$ (also unmerklich) ist; $y \approx 0{,}205$ m. Auch bei den andern Werten der folgenden Tabelle behält die Zunge ihre bisherige Einstellung, wenn nicht ein Zungenrückschlag nötig ist.

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	m
y_1	0,0227	0,0909	0,205	0,364	0,568	0,818	1,114	1,454	1,840	m
y_2	0	0	0	0	0	0,001	0,001	0,002	0,003	m
y	0,0227	0,0909	0,205	0,364	0,568	0,819	1,115	1,456	1,843	m

x	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	m
y_1	2,27	2,75	3,27	3,84	4,45	5,11	5,82	6,56	7,36	8,20	9,09	m
y_2	0,005	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	m
y	2,275	2,76	3,28	3,85	4,47	5,13	5,85	6,60	7,41	8,26	9,17	m

Um festzustellen, ob für $x = 100$ m die vernachlässigten Glieder der Reihenentwicklung sich bemerkbar machen, berechnen wir y direkt. Es ist $y = 550 - \sqrt{550^2 - 100^2} = 550 - \sqrt{292500} = 550 - 540{,}833$. (Die Wurzel wurde nach dem in Abschnitt 14 angegebenen Verfahren berechnet). Da $y = 9{,}167$ m ist, während wir 9,17 m fanden, ist die Näherungsformel hier noch zulässig.

Beispiel 46. Bei Polygonseitenmessungen sind die zulässigen Differenzen zweier Messungen a für die Länge l gegeben durch die Formeln:

I. günstige Verhältnisse: $a = 0{,}004\sqrt{l} + 0{,}00030\,l + 0{,}02$ m;

II. mittlere Verhältnisse: $a = 0{,}006\sqrt{l} + 0{,}00035\,l + 0{,}02$ m;

III. ungünstige Verhältnisse: $a = 0{,}008\sqrt{l} + 0{,}00040\,l + 0{,}02$ m.

Man berechne eine Tabelle.

Lösung: Man hat z. B.

l	I	II	III
	a		
10 m	0,04	0,04	0,05
50 m	0,06	0,10	0,10
100 m	0,09	0,12	0,14
200 m	0,14	0,20	0,21
300 m	0,18	0,23	0,28

usw. Die Angaben für a sind in m gemacht.

Beispiel 47. Der mittlere Zielfehler eines Fernrohrs kann als $m = \frac{4''}{\sqrt{v}}$ bis $\frac{3''}{\sqrt{v}}$ angenommen werden, also im Mittel zu $\frac{3{,}''5}{\sqrt{v}}$. Man stelle den Zusammenhang für $v = 10$ bis $v = 50$ graphisch dar. v ist die Vergrößerung.

v	10	15	20	25	30	35	40	45	50
m	1,107	0,904	0,783	0,700	0,639	0,592	0,553	0,522	0,495

Die Genauigkeit des Rechenschiebers übersteigt hier die Anforderungen der Praxis. Eine andere Formel für den Zielfehler ist $m = \frac{20''}{v}$. Sie ist durch die steilere Kurve in Fig. 19 wiedergegeben. Man sieht, daß zwischen 20- bis 50-facher Vergrößerung die Abweichung nur gering ist.

Beispiel 48. In einem Rechteck mit den Seiten a und b Meter sei $\frac{a}{b} = n$. Der Fehler einer Längenmessung sei der Quadratwurzel aus der Länge proportional $(\Delta a = k\sqrt{a}, \Delta b = k\sqrt{b})$. Dann ist $\Delta F = \sqrt[4]{F^3} \cdot \sqrt[4]{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. Bei Latten- oder Bandmessungen ist $k = 0{,}005$. Man stelle eine Tabelle für den Flächenfehler auf.

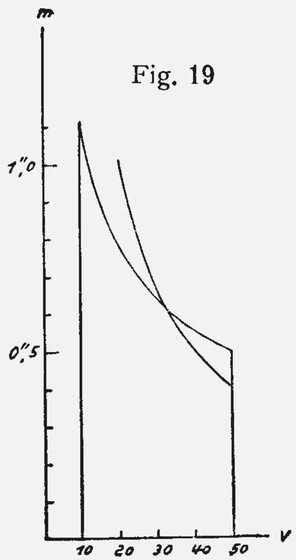


Fig. 19

Lösung: $\sqrt[4]{n}=\sqrt{\sqrt{n}}$; $\sqrt[4]{F^3}=\sqrt{F}\cdot\sqrt[4]{F}$. **Wählt** man $F=1$, 10, 100 ... m², so erhält man:

F	1	10	100	1000	10000	100000
$\sqrt{F}$	1	3,162	10	31,62	100	316,2
$\sqrt[4]{F}$	1	1,778	3,162	5,62	10	17,78
$\sqrt[4]{F^3}$	1	5,62	31,62	177,8	1000	5620

n	1	2	4	6	8	10
$\sqrt[4]{n}$	1	1,19	1,414	1,565	1,682	1,778
$\sqrt{1+\frac{1}{n}}$	1,414	1,225	1,118	1,080	1,061	1,049
$k\sqrt[4]{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$	0,00707	0,00728	0,00790	0,00845	0.00892	0,00933

Z. B. erhält man für $F=1000$ m², $n=6$ den Fehler $177{,}8\cdot 0{,}00845=1{,}5$ m².

Beispiel 49. Aus einem See fließt Wasser über einen flachen Wehrrücken. Es hat die Geschwindigkeit $v=\sqrt{2\,\mathrm{gh}}$ m/s, wenn $\mathrm{g}=9{,}81$ m/s² und h der in Metern gemessene Höhenunterschied der betreffenden Stelle gegen den Seespiegel ist. Man bestimme v für $h=1{,}00$; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0; 2,25; 2,5; 2,75; 3,00 m.

Lösung: a) Man berechnet $2g\cdot h$ mit U_1 und U_2, sucht das Ergebnis auf Q auf und findet darüber v auf U_1. Z. B. ist $2g\cdot 1{,}75=9{,}81\cdot 3{,}5=34{,}3$; $v=\sqrt{34{,}3}=5{,}86$ m/s.

b) Auf U_2 steht die Marke $\sqrt{}$; sie gibt die Zahl $\sqrt{2g}=4{,}429$ an. Sucht man „h" auf Q auf, so steht darüber „$\sqrt{h}$" auf U_1 (hier 1,323). Ohne diese Zahl abzulesen, setzt man „1" oder „10" (U_2) über sie und verschiebt den Läufer so weit, daß sein Strich „$\sqrt{}$" auf U_2 bedeckt. Darunter findet man auf U_1, daß $\sqrt{h}\cdot\sqrt{2g}=\sqrt{2gh}=v$ ist. (5,86). Die Ergebnisse unserer Aufgabe sind: 4,43; 4,95; $5{,}42_5$; 5,86; 6,26; 6,64; 7,00; 7,35; 7,67 m/s.

17. Kreisrechnung

Ist r der Radius, d der Durchmesser eines Kreises, so ist sein Umfang $U=2\pi r=\pi d$. Die Multiplikation läßt sich mit U_1 und U_2 leicht durchführen, weil „π" dort durch einen Strich markiert ist. Will man genauere Ergebnisse haben, so setzt man (vgl. Abschnitt 10) $\pi=\frac{355}{113}=3\frac{16}{113}$. Man erhält das Resultat mit siebenstelliger Genauigkeit, wenn man die in dem genannten Abschnitt angegebenen Rechenregeln benutzt. Z. B. ist für $d=213$ m : $U=639+\frac{213\cdot 16}{113}$; $213\cdot 16=3408$; $3408:113=30{,}1593$; $U=669{,}1593$ m. Eine siebenstellige Tafel liefert 669,1592 m.

Der Flächeninhalt des Kreises ist $F=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}$.

a) Man stellt „1" (U_2) oder „10" (U_2) über „π" (Q) (vgl. Abschnitt 16). Dann liegt „F" (Q) unter „r" (U_2). Man kontrolliere die Tabelle:

r	1,5	1,82	24,7	52,9	623	85,7	mm
F	7,07	10,40	1920	8790	1220000	23100	mm²

Wünscht man eine größere Genauigkeit, so verfährt man wie oben.

b) Man bringt „1" oder „10" (U_2) über $\frac{\pi}{4}=0{,}7854$ (Q) und schiebt M auf „d" (U_2). Dann überdeckt M zugleich F auf Q. Man rechne dieselbe Tabelle noch einmal nach ($d=3{,}0$; 3,64 usw.).

c) Wir lassen die Zunge in der eben benutzten Stellung stehen und bringen den rechten der drei Läuferstriche auf „100" (Q). Dann sehen wir, daß der mittlere, M, genau auf $\frac{\pi}{4}=0{,}7854$ (Q) steht. Dieselbe Beziehung besteht zwischen M und dem linken Läuferstrich. Der Dreistrichläufer führt also die Multiplikation mit $\frac{\pi}{4}$ automatisch aus. Wir stellen den rechten Läuferstrich auf „d" (U_1) und lesen unter dem mittleren, M, auf Q die Fläche $F=\frac{\pi}{4}\cdot d^2$ ab. Ebensogut kann man M auf „d" (U_1) setzen und F unter dem linken Läuferstrich auf Q finden. Bei diesem Verfahren braucht man die Zunge überhaupt nicht.

d) Auf U_2 befindet sich noch die Marke $c=1{,}128$. Man stellt leicht fest, daß „c" von „1" denselben Abstand hat wie der Mittelstrich des Läufers von einem der beiden andern Striche. So ergibt sich die Regel: *Man stelle „c" (U_2) über „d" (U_1). Dann findet man „F" (Q) unter „1" (U_1).* c entspricht auf der Skala Q dem Werte $\frac{4}{\pi}=1{,}273$, auf U_1 $\sqrt{\frac{4}{\pi}}=1{,}128$. Man berechnet also $F=\frac{\pi d^2}{4}$ nach der Formel $F=\left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2=\left(\frac{d}{c}\right)^2$.

Beispiel 50. Vor einem h Meter über der Erdoberfläche befindlichen Punkt kann man $3{,}84\sqrt{h}$ km weit sehen. Wie groß ist die Sichtweite s von einem 35 m hohen Aussichtsturm, wie groß die überschaute Fläche und wie lang ihre Begrenzung, der Horizont? Man beantworte dieselben Fragen für den Mont Everest ($h=8882$ m).

Lösung: $s_1=22{,}72$ km, $s_2=362$ km, $F_1=1620$ km², $F_2=412000$ km²; $U_1=142{,}7$ km; $U_2=2275$ km. (Natürlich ist freie Sicht nach allen Seiten vorausgesetzt.)

Unter Benutzung des Teilstrichs c kann man die folgenden Formeln leicht so umbilden, daß sie für den Universalschieber unmittelbar zugänglich sind:

1) Zylinderinhalt: $V=\frac{\pi d^2}{4}\cdot l=\left(\frac{d}{c}\right)^2\cdot l=\left(\frac{d}{c}\sqrt{l}\right)^2$. Man sucht „$l$" auf Q auf, findet darüber auf U_1 „$\sqrt{l}$", dividiert durch „c" und multipliziert mit „d" Dann steht auf U_1 „$\frac{d}{c}\sqrt{l}$", darunter auf Q „$\left(\frac{d}{c}\sqrt{l}\right)^2$" $=V$.

2) Kegelinhalt: $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{3} = \left(\frac{d}{c}\sqrt{\frac{l}{3}}\right)^2$.

3) Kugeloberfläche: $O = \pi d^2 = 4\left(\frac{d}{c}\right)^2 = \left(\frac{2d}{c}\right)^2$.

4) Kugelinhalt: $V = \frac{\pi d^3}{6} = 4\left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot \frac{d}{6} = \left(\frac{d}{c}\sqrt{\frac{2}{3}d}\right)^2$.

Z. B. ist für $d = 2{,}5$ cm, $l = 7$ cm der Zylinderinhalt gleich 34,4 cm³, der Kegelinhalt 11,45 cm³, die Kugeloberfläche 19,63 cm² und der Kugelinhalt 8,18 cm³.

18. Die Kubikskala K

Überdeckt der Läuferstrich die Zahl „a" auf U_1, so steht er über „a^3" der Skala K. Da U_1 die Zahlen von 1 bis 10 enthält, so reicht K von „1" bis „1000". Ist bei a eine Kommaverschiebung nötig, so muß bei a^3 das Komma um die dreifache Stellenzahl verschoben werden. Z. B. findet man $2{,}45^3 = 14{,}7$. Dann ist $24{,}5^3 = 14700$; $0{,}245^3 = 0{,}0147$.

Beispiel 51. Man prüfe folgende Tabelle:

a	π	72,5	0,937	0 0135	488
a^3	31,0	381000	0,823	0,00000246	116000000

Sucht man umgekehrt $\sqrt[3]{a}$, so stellt man „a" auf K ein und findet die dritte Wurzel darüber auf U_1. Ist eine Kommaverschiebung nötig, so darf sie bei a (auf K) nur immer 3, 6, 9 ... Stellen betragen, denen auf U_1 1, 2, 3 Stellen entsprechen. So ist $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{8'000} = 20$, $\sqrt[3]{8'000'000} = 200$, $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$ usw. Dagegen ist $\sqrt[3]{80} = 4{,}31$, $\sqrt[3]{800} = 9{,}28$.

Beispiel 52. Man prüfe die Tabelle:

a	7,5	75	750	7500	0,75	0,000075	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\sqrt[3]{a}$	1,958	4,22	9,09	19,58	0,909	0,0422	0,806	1,612

Beispiel 53. Es sei $F = 450$, wie groß ist $x = \sqrt[4]{F^3}$ (vgl. Beispiel 48)?

Lösung: $x = \sqrt[4]{91100000} = \sqrt{9540} = 97{,}7$. Man prüfe das Ergebnis mit der dort angegebenen Methode und bilde selbst andere Zahlenbeispiele.

Beispiel 54. Der Inhalt einer Kugel ist $V = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{4}{3} r^3 \pi$ (d Durchmesser, r Radius). Wie berechnet man ihn mit der Kubikskala?

Lösung: Man setzt „10" (U_2) über „8,06" (U_1) und stellt M über „d" (U_2. Dann bedeckt dieser Läuferstrich auf U_1 „0,806 d" $\left(= d\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\right)$, auf K findet man also $d^3 \cdot \frac{\pi}{6} = V$.

Man kann auch „1" (U_2) über „1,612" $\left(= \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}\right)$ der Skala U_1 setzen und M auf „r" (U_2) bringen, dann bedeckt M auf K das gesuchte Volumen.

Beispiel 55. Der Durchmesser einer Kugel sei 5,4 mm, 8,5 mm, 12,5 mm, 19,5 mm. Wie groß ist der Inhalt?

Lösung: 82,4; 322; 10,22; 3880 mm³.

Beispiel 56. Wie groß ist der Radius einer Kugel, deren Inhalt 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200 cm³ beträgt?

Lösung: Man stellt die Zunge so ein wie vorher beschrieben, sucht V auf K auf und findet r auf U_2, nämlich 1,684; 2,122; 2,43; 2,67; 2,88; 3,30; 3,63 cm.

Beispiel 57. Der Äquatorradius des Erdellipsoids ist $a = 6377$ km, die Polarhalbachse $b = 6356$ km (Bessel). Wie groß ist das Erdvolumen?

Lösung: Wäre die Erde eine Kugel mit dem Radius $a = 6{,}377 \cdot 10^3$ km, so wäre ihr Inhalt $1{,}086 \cdot 10^{12}$ km³; wegen der Abplattung muß diese Zahl mit $\frac{b}{a}$ multipliziert werden; man erhält $V = 1{,}082_5 \cdot 10^{12}$ km³, also etwas mehr als eine Billion Kubikkilometer. ($1{,}086 \cdot \frac{b}{a} = 1{,}086\left(1 - \frac{a-b}{a}\right) = 1{,}086 - 1{,}086 \cdot \frac{21}{6377} = 1{,}086 - 0{,}003_5 = 1{,}082_5$).

19. Winkelmaße

Die Teilkreise der Theodolite geben die Winkel entweder in Graden, Minuten und Sekunden an (ältere Teilung) oder in dezimal geteilten Neugraden. Der älteren Teilung entspricht der Rechenstab Nr. $28^{360°}$, der neuen Nr. 28^{400^g}. Die folgenden Aufgaben sind teils in der einen, teils in der anderen Bezeichnung gegeben, es ist deshalb nötig, sich mit der Umwandlung vertraut zu machen.

Beide Teilungen gehen von einem rechten Winkel (1 R oder 1 ∟) aus. Dieser wird bei der *alten Teilung* in 90° zerlegt. 1° wird entweder dezimal geteilt oder, wie es meistens geschieht, in 60′, 1′ setzt man = 60″, die Sekunden werden dezimal geteilt.

Bei der *neuen Teilung* ist 1 R = 100^g (Neugrad), $1^g = 100^c$ (Neuminuten), $1^c = 100^{cc}$ (Neusekunden). Man kann hier jeden Winkel auch einfach dezimal schreiben: $7^g 18^c 72^{cc} = 7^g{,}1872$.

Bei der Umwandlung denke man daran, daß 1 R = 90° = 100^g ist.

Von Winkeln, die größer als 1 R sind, kann man also zunächst das betreffende Vielfache von 1 R abspalten, bevor man mit der Umrechnung beginnt, diese braucht sich daher nur auf spitze Winkel zu beschränken. Bei der Benutzung des Rechenschiebers genügt es zunächst, sich auf eine ungefähre Genauigkeit von 1′ oder 1^c zu beschränken.

a) Umwandlung von Neugrad in Altgrad

Es ist $100^g = 90°$, $1^g = 0°{,}9 = 1° - {}^1/_{10}°$. Man braucht also von der Angabe in Neugrad nur den zehnten Teil abzuziehen, dann erhält man den Winkel in dezimal geteilten Altgraden. Den Dezimalbruch verwandelt man, indem man den Rechenschieber zur Multiplikation mit 60 benutzt, in Minuten.

Beispiel 58. Man forme 30^g, $48^g{,}25$, $133^g{,}27$, $350^g{,}06$ in altes Maß um.

Lösung:	1.	2.	3.	4.
	30^g	$48^g{,}25$	$100^g = 90°$	$300^g = 270°$
	3	4, 825	90°	270°
	27°	43° 42₅	33,27	50,06
		43° 25′₅	3,327	5,006
			119°943	315,054
			119°57′	315°3′

b) Umwandlung von Altgrad in Neugrad

$90° = 100^g$, also $1° = \frac{10^g}{9} = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^g$. Zur Altgradangabe fügt man den neunten Teil hinzu, man erhält einen periodischen Dezimalbruch. Ferner ist $1^g = 0^0{,}9 = 54'$, also $1' = \frac{1^g}{54} = \frac{100^c}{54} = 1^c{,}852$. Stehen auf U_1 die Altgradminuten ($'$), so stehen darüber auf U_2 die Neugradminuten (^{c}), wenn man „100“ (U_2) über „54“ (U_1) setzt.

Beispiel 59. Die Winkel $13^0 27'$, $58^0 38'$, $124^0 10'$, $321^0 44'$ sollen in neuer Teilung angegeben werden.

Lösung:

1.	2.	3.	4.
13	58	100^g	300^g
1,44	6,44	34	51
$27' = 0{,}50$	$38' = 0{,}70$	3,78	5,67
$14^g{,}94$	$65^g{,}14$	$10' = 0{,}19$	$44' = 0{,}81$
		$137^g{,}97$	$357^g{,}48$

Wird eine größere Genauigkeit verlangt, so braucht man nur die Teiloperationen schärfer durchzuführen und zu beachten, daß $1'' = \frac{100^c}{54.60} = \frac{10^{cc}}{3{,}24} = 3^{cc}{,}09$ ist.

Beispiel 60. Man verwandle $\alpha = 82^g\,14^c\,22^{cc}$ und $\beta = 61^0\,14'\,22''$ in das andere Maß.

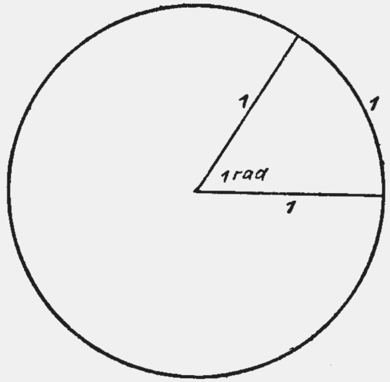
Lösung:

1.	2.
82,1422	61
$-\ 8{,}2142$	$+\ 6{,}7778$
$73^0{,}9280$	$14' = 0{,}2593$
$= 73^0 55'{,}68$	$22'' = 0{,}0068$
$\alpha = 73^0 55' 41''$	$\beta = 68^g{,}\ 0439$

20. Das Bogenmaß

Zeichnet man in einen Kreis, dessen Radius gleich der Einheit (z. B. 1 dm) ist, einen Zentriwinkel hinein, so ist dessen Größe durch den Kreisbogen bestimmt, der zwischen seinen Schenkeln liegt. Man mißt so den Winkel im *Bogenmaß*. Die Winkeleinheit ist hier 1 rad (Radiant), der Winkel, den man erhält, wenn man den Bogen gleich dem Radius macht. (Fig. 20). Wir wollen einen Winkel, der gleich a rad ist, mit $\overset{\frown}{a}$ bezeichnen.

Fig. 20



Um das Bogenmaß mit dem alten oder neuen Gradmaß in Beziehung zu setzen, nimmt man den Vollwinkel, $4\,R = 360^0 = 400^g$. Der zugehörige Bogen ist gleich dem Kreisumfang $2\,\pi$, es ist daher $2\overset{\frown}{\pi} = 360^0$, $\overset{\frown}{1} = \frac{360^0}{2\,\pi} = 57^0,2958 = 57^0\ 17'\ 45'' = 3437',\ 75 = 206265''$. Diese Umwandlungszahlen mögen mit ϱ^0, ϱ', ϱ'' bezeichnet werden. Ebenso hat man $\overset{\frown}{1} = \frac{400^g}{2\,\pi} = 63^g{,}6620 = 6366^c,\ 20 = 63\,66\,20^{cc}$. Diese letzte Zahl sei mit $\varrho_{''}$ bezeichnet. Dann ist $\overset{\frown}{a} = \frac{a}{\varrho}$, $a = \overset{\frown}{a} \cdot \varrho$, wobei für die verschiedenen Bezeichnungen von a die Tabelle gilt:

a	^{0}	$'$	$''$	^{g}	^{c}	^{cc}
ϱ	57,3	3438	206265	63,6620	6366,20	636620

ϱ'' und $\varrho_{''}$ finden wir auf den Skalen des Rechenschiebers, so daß eine Multiplikation oder Division sehr bequem gemacht wird.

Beispiel 61. Es sollen die Winkel 1. $\alpha = 27^0$, 2. $\alpha = 48^0\,32'$, 3. $\alpha = 65^0 13' 40''$, 4. $\alpha = 46^g$, 5. $\alpha = 59^g\,26^c$, 6. $\alpha = 76^g\,13^c\,88^{cc}$ in Bogenmaß umgewandelt werden.

Lösung: 1. $\overset{\frown}{\alpha} = \frac{27^0}{57^0{,}3} = \frac{1620'}{3438'} = \frac{97200''}{206265''} = 0{,}471$; 2. $\overset{\frown}{\alpha} = \frac{2912'}{3438'} = 0{,}847$; 3. $\overset{\frown}{a} = \frac{234820''}{206265''} = 1{,}138$ oder $65^0 = 1{,}134$, $13' = 0{,}004$, $40'' = 0{,}0002$, Summe 1,138; 4. $\overset{\frown}{a} = \frac{46}{63{,}66} = 0{,}722_5$; 5. $\overset{\frown}{a} = \frac{59{,}26}{63{,}66} = 0{,}931$; 6. $\overset{\frown}{a} = \frac{76{,}1388}{63{,}66} = 1{,}196$.

Beispiel 62. Es sei $\overset{\frown}{a} = 0{,}7$; 0,459; 1,3685. Wie groß ist a in Alt- und Neugradmaß?

1. $a = 0{,}7 \cdot 57^0{,}3 = 40^0{,}1$; $a = 0{,}7 \cdot 3438' = 2406{,}6 = 40^0 6'{,}6$; $a = 0{,}7 \cdot 206265'' = 144385''{,}5 = 40^0 6' 25''{,}5$; $a = 0{,}7 \cdot 63^g{,}662 = 44^g{,}5634 = 44^g 56^c 34^{cc}$.

Mit Rechenschiebergenauigkeit erhält man $\overset{\frown}{0{,}459} = 26^0{,}3 = 26^0 18' = 29^g{,}2$. $\overset{\frown}{1{,}3685} = 78^0{,}4 = 78^0 24' = 87^g{,}1$.

Die Verwendung des Bogenmaßes ist besonders bequem, wenn die Länge eines Kreisbogens und die Fläche des zugehörigen Kreisausschnitts bestimmt werden soll. Für $r = 1\,dm$, $\overset{\frown}{a} = 1\,rad$ ist der Bogen $b = 1\,dm$, für die allgemeinen Werte also $b = r \cdot \overset{\frown}{a}$. Der Kreisausschnitt hat die Fläche ($\frac{1}{2} \times$ Radius $\times$ Bogen) $F = \frac{1}{2}\, r^2 \overset{\frown}{a}$.

Das Bogenmaß findet ferner bei der Berechnung der trigonometrischen Funktionen Anwendung. Es ist

$$sin\ a = \overset{\frown}{a} - \frac{1}{6}\overset{\frown}{a}^3 + \frac{1}{120}\overset{\frown}{a}^5 \ldots$$

$$cos\ a = 1 - \frac{1}{2}\overset{\frown}{a}^2 + \frac{1}{24}\overset{\frown}{a}^4 \ldots$$

$$tg\ a = \overset{\frown}{a} + \frac{1}{3}\overset{\frown}{a}^3 + \frac{2}{15}\overset{\frown}{a}^5 + \ldots$$

$$2\ sin\ \frac{a}{2} = \overset{\frown}{a} - \frac{1}{24}\overset{\frown}{a}^3 + \frac{1}{1920}\overset{\frown}{a}^5 \ldots$$

Beispiel 63. Wie lang ist die Bahnkurve in Beispiel 45, wenn der zugehörige Zentriwinkel a) 43^0, b) $67^g{,}25$ ist?

Lösung: a) $b = \frac{550 \cdot 43^0}{57^0{,}3} = \frac{550 \cdot 43 \cdot 3600''}{\varrho''} = 413$ m. b) $b = \frac{550\ \cdot\ 672500}{\varrho''} = 581$ m.

Beispiel 64. Wie groß ist *sin a*, *cos a*, *tg a* für $a = 5^0$, $10^0\,40'$, 6_g. 8^g, 4285?

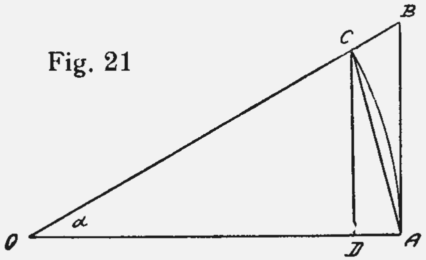
Lösung: a) $\overset{\frown}{a} = 0{,}0873$; $sin\ a = 0\,0873 - 0{,}0001 = 0{,}0872$, $cos\ a = 1 - 0{,}0038 = 0{,}9962$; $tg\ a = 0{,}0873 + 0{,}0002 = 0{,}0875$. b $\overset{\frown}{a} = 0{,}1862$, $sin\ a = 0\,1862 - 0{,}0011 = 0{,}1851$; $cos\ a = 0{,}9827$; $tg\ a = 0{,}1883$. c) $\overset{\frown}{a} = 0{,}0942_5$; $sin\ a = 0{,}0941$; $cos\ a = 0{,}9956$; $tg\ a = 0{,}0945$. d) $\overset{\frown}{a} = 0{,}1324$, $sin\ a = 0{,}1320$, $cos\ a = 9912$, $tg\ a = 0{,}1333$

21. Kleine Winkel

In Figur 21 ist, wenn der Radius r und der Zentriwinkel α beträgt, $CD = r\ sin\ \alpha$, $AB = r\ tg\ \alpha$, die Strecke $AC = 2\ r\ sin\ \frac{\alpha}{2}$ und der Bogen

$AC = r\widehat{\alpha}$. Die Abbildung zeigt, daß die Unterschiede in der Länge bei kleinen Winkeln sehr klein sind; man kann diese vier Linien näherungsweise $= r\widehat{\alpha}$ setzen. Den Grad der Annäherung geben die Zusatzglieder der Formeln an, bei denen man $\widehat{\alpha}^5$ usw. unberücksichtigt lassen kann. Zum Beispiel ist für $\alpha = 2°$ das Bogenmaß $\widehat{\alpha} = \frac{2}{57,3} = \frac{7200}{\varrho''}$, wofür man mit dem Rechenschieber $\widehat{\alpha} = 0,0349$ erhält, also

Fig. 21



$$\sin 2° \approx \operatorname{tg} 2° \approx 0,0349 \approx 2° \sin 1°;\quad \cos 2° \approx 1 - \frac{0,0349^2}{2} = 0,9994.$$

Das Zusatzglied für $\sin \alpha$ ist $-\frac{0,0349^3}{6} = -0,0000071$, für $\operatorname{tg} \alpha = +0,0000142$, für $\cos \alpha = +0,000\,000062$, für $2 \sin \frac{\alpha}{2} = -0,0000018$, Größen, die bei der hier angestrebten Genauigkeit völlig belanglos sind. Vernachlässigt man sie, so ersetzt bei kleinen Winkeln die Rechnung mit ϱ'' oder $\varrho_{,,}$ die Benutzung einer trigonometrischen Tafel.

Es sei in Fig. 21 $r = 1000$ m, $\alpha = 1^g$. Dann ist bei siebenstelliger Rechnung $(\pi = \frac{355}{113})$ $\varrho_{,,} = \frac{2\,000\,000}{\pi} = 636\,619,8$; $r\widehat{\alpha} = 15,70796$ m. Die Abweichungen bei $r \sin \alpha$, $r \operatorname{tg} \alpha$ und $2 r \sin \frac{\alpha}{2}$ betragen $-0,00065$ m $+0,00130$ m, $-0,00016$ m, sie sind also nur von der Größenordnung eines Millimeters.

Beispiel 65. Die direkte Messung des Abstandes zwischen den Punkten O und A (Fig. 21) ist durch ein zwischen diesen Punkten liegendes sumpfiges Gelände unmöglich. Man stellt deshalb in A eine Latte senkrecht zur Zielrichtung auf und bestimmt den Winkel α, unter dem die Strecke a (AB oder AC) erscheint. Wie groß ist die Entfernung $OA = x$?

Lösung: Ist α ein kleiner Winkel, so ist $x \cdot \widehat{\alpha} = \frac{x \cdot \alpha}{\varrho} = a$, also $x = \frac{\varrho a}{\alpha}$

Man prüfe folgende Tabelle:

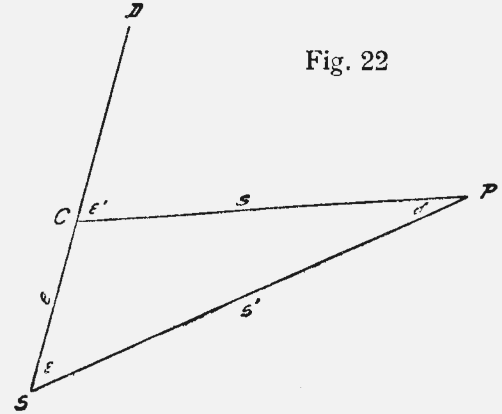
a	1,64	0 995	2,15	1,85	3,25	2,85	m
α	52′	82^c	1^g	1°14′	1^g 50^c	0^g 44^c 30^{cc}	
x	108,5	77,2	137	86	138	410	m

Im ersten Fall hat man z. B. $x = \frac{3438' \cdot 1,64 \text{ m}}{52'}$, im zweiten $\frac{6366^c \cdot 0,995}{82^c}$ usw.

Beispiel 66. Als Zielpunkt einer Triangulierung diene eine Fahnenstange C (Fig. 22). Sollen Winkel gemessen werden, die von ihr ausgehen, so ist es natürlich nicht möglich, den Theodoliten in C aufzustellen, sondern man muß einen Nachbarpunkt S wählen. Man mißt also statt des Winkels $DCP = \varepsilon'$ den Winkel $DSP = \varepsilon$. Wie groß ist die an ε anzubringende Korrektur?

Lösung: $\varepsilon' - \varepsilon = \delta$. Fällt man von C auf SP das Lot, so findet man, daß $s \cdot \sin \delta = e \sin \varepsilon$ ist. Dabei ist, wenn P eine größere Entfernung hat, δ klein

Fig. 22



(aber nicht ε), mithin ist $\sin \delta \approx \frac{\delta}{\varrho}$, ferner ist $\sin \delta = \frac{e}{s} \sin \varepsilon$, $\delta = \varepsilon' - \varepsilon \approx \frac{\varrho\, e \sin \varepsilon}{s}$; ε und e lassen sich leicht durch Messung bestimmen, für P genügt schon eine annähernde Kenntnis von s; $\sin \varepsilon$ entnimmt man entweder einer Tabelle oder man benutzt den Rechenstab (vgl. Abschnitt 22).

Es sei z. B. $e = 1,23$ m, $\varepsilon = 33°15'$, $s \approx 2500$ m, dann ist $\delta = \frac{206265'' \cdot 1,23 \cdot \sin 33°15'}{2500} = 55'',6$; $\varepsilon' = 33°15'55'',6$. Hat SP gegen die Nordrichtung die Abweichung $\delta = 11°16'24''$, so ist der Richtungswinkel von CP gleich $\alpha_1 = 11°17'19'',6$. Man prüfe die folgende, für $e = 0,95$ m gültige Tabelle:

ε	67°13′11″	124°5′6″	217°44′12″	342°9′33″	88^g,10^{c}45^{cc}	217^{g}49^c	330^g 28^c 80^{cc}
s	114	2504	10920	1366	156	3875	622 m
δ	1585″	64″,8	—10″,98	—44″,0	0,^{g} 381	—0^g,00423	—0^g,0864
ε'	67°39′36″	124°6′11″	217°44′1″	342°8′49″	88$_g$48^{c}55^{cc}	217^{g}48^{c}58^{cc}	330^g 20^{c}16^{cc}

22. Die trigonometrischen Teilungen

Auf der Rückseite der Zunge finden wir die zur Ermittlung der trigonometrischen Funktionen $\sin \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ dienenden Teilungen S, $S \& T$ und T. Sie sind so konstruiert, daß die Winkel genau unter den auf U_2 stehenden Funktionswerten liegen. Ferner sehen wir auf der Unterseite des Stabes links und rechts in den Aussparungen je einen scharfen Strich, die Kerbe, genau unter „1“ und „10“ von U_1. Wir wollen diese Kerben mit K_r und K_l bezeichnen.

Die Teilung S trägt die Winkel, deren Sinuswerte zwischen 0,1 und 1 liegen, also mit 0, beginnen. Sie geht daher von $\alpha = 5°44'$ (6^{g}38^c) bis $\alpha = 90°$ (100^g). Auf $S \& T$ stehen die Winkel, deren Sinuswerte von 0,01 bis 0,10 laufen, also mit 0,0 beginnen. Sie reicht von $\alpha = 0°34'$ (0^{g}63^c,7) bis $\alpha = 5°44'$ (6^{g}38^c), Da innerhalb dieses Gebietes $\sin \alpha$ sich nur unmerklich von $\operatorname{tg} \alpha$ unterscheidet, dient die Skala gleichzeitig zum Auffinden der Tangensfunktion kleiner Winkel. T enthält die Winkel von 5°44′ (6^{g}38^c) bis 45° (50^g). Innerhalb dieser Grenzen beginnt $\operatorname{tg} \alpha$ mit O,.

Will man $\sin \alpha$ haben, so stellt man „α“ (S oder $S \& T$) auf K_r ein und liest das Ergebnis auf U_2 über „10“ (U_1) ab. Da $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ ist, so kann man diese Skalen auch benutzen, um $\cos \alpha$ zu finden, wenn α zwischen 0° und 89°26′ (0^g und 99^{g}37^c) liegt.

Soll $\operatorname{tg} \alpha$ bestimmt werden, wenn α zwischen 0°34′ und 5°44′ (0^{g}63^c,7 und 6^{g}38^c) liegt, so benutzt man wie vorher die Teilung $S \& T$. Liegt α zwischen 5°44′ und 45° (6^{g}38^c und 50^g), so stellt man den betreffenden Winkel der Teilung T auf K_l ein, dann steht $\operatorname{tg} \alpha$ auf U_2 über „1“ (U_1). Man findet gleichzeitig $\operatorname{ctg} \alpha \left(= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)$ auf U_1 unter „10“ (U_2);

ctg α liegt für die genannten Winkel zwischen 1 und 10. Wenn *α* größer als 45° (50^g) ist, so braucht man nur die Formeln $tg\,\alpha = ctg\,(90° - \alpha) = ctg\,(100^g - \alpha)$ und $ctg\,\alpha = tg\,(90° - \alpha) = tg\,(100^g - \alpha)$ anzuwenden. Ist *α* kleiner als 0° 34′ (0^g 63^c,7), so kann auf den vorigen Abschnitt verwiesen werden: $sin\,\alpha \approx tg\,\alpha \approx \widehat{\alpha} = \frac{\alpha}{\varrho}$, also $ctg\,\alpha \approx \frac{\varrho}{\alpha}$.

Es gibt noch eine andere Methode zur Bestimmung der trigonometrischen Funktionen. Man zieht die Zunge heraus, dreht sie um und schiebt sie wieder hinein, so daß die Endstriche von *S* und *T* über „10“ (U_1) stehen. Stellt man den Läuferstrich *M* auf den Winkel *α* einer der drei Skalen, so findet man die zugehörigen Funktionen unter ihm auf U_1 oder O_1.

Hat man es mit stumpfen oder überstumpfen Winkeln zu tun, so wird auf die Formeln der Trigonometrie verwiesen.

Der Übergang von der Funktion zum Winkel vollzieht sich bei beiden Methoden einfach in umgekehrter Reihenfolge.

Beispiel 67. Man prüfe die folende Tabelle:

a	20°	20^g	35°20′	35^{g}20^c	66°	70^{g}50^c	4°15′	4^{g}15^c	86°	95^g
sin *a*	0,342	0,309	0,578	0,525	0,914	0,894	0,0742	0,0652	0,9975	0,997
cos *a*	0,940	0,951	0,816	0,851	0,407	0,447	0,997	0,998	0,0698	0,0786
tg *a*	0,364	0,325	0,709	0,617	2,246	2,001	0,0742	0,0652	14,30	12,71
ctg *a*	2,747	3,078	1,411	1,620	0,445	0,500	13,46	15,32	0,0698	0,0786

Beispiel 68. Es sei a) sin *a* = 0,53, b) sin *a* = 0,053, c) tg *a* = 0,42, d) tg *a* = 0,051, e) tg *a* = 4,25, f) ctg *a* = 6,5, g) ctg *a* = 0,4, h) ctg *a* = 0,02, i) cos *a* = 0,90, k) cos *a* = 0,09. Wie groß ist in jedem Falle *a*?

Lösung: a) Man stellt „5,3“ (U_2) über „10“ (U_1) und liest auf der Rückseite der Zunge (Skala *S*) unter K_r ab, daß *α* = 32° 0′ (35^{g}56^c) ist. Bei umgekehrter Zunge stellt man ein: *S* Endstrich unter „10“ (O_1) und liest *a* auf *S* unter „5,3“ (O_1) ab. Dies Verfahren ist genauer. b) Man verfährt ebenso, nur benutzt man die Skala S und T. Es ergibt sich *a* = 3°2′ (3^{g}38^c). c) Man benutzt Teilung T, *a* = 22°47′ (25^{g}32^c). d) 2°55′ (3^{g}25^c) (Teilung S und T), e) Man stellt „10“ (U_2) über „4,25“ (U_1). Dann steht $\frac{1}{4,25}$ (= 0,2353) auf U_2 über „1“ (U_1). Darunter liest man auf K_1 ab, daß R—*a* = 13°14′ (14^{g}71^c) ist. Mithin ist *a* = 76°46′ (85^{g}29^c). f) Bei entsprechender Einstellung findet man tg $a = \frac{1}{6,5}$ (= 0,1538), *a* = 8°45′ (9^{g}72^c). g) (R—*a*) = 21°48′ (24^{g}22^c) *a* = 68°12′ (75^{g}78^c). h) R — *a* = 1°8′,75 (1^{g}27^{c}3); *a* = 88°51′,25 (98^{g}72 ^{c}7); i) R — *a* = 64°10′ (71^{g}30^c), *a* = 25°50′ (28^{g}70^c). k) R — *a* = 5°10′ (5^{g}74^c), also *a* = 84°50′ (94^{g}26^c).

Beispiel 69. Eine Strecke P_1P_2 hat die Länge c m und bildet mit der Nordrichtung den Winkel *φ*. Wie groß sind die Koordinatendifferenzen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$? (Fig. 10)

Lösung: $x_2 - x_1 = c\,\cos\varphi$, $y_2 - y_1 = c\,\sin\varphi$. Man schiebt die Zunge so ein, daß die trigonometrischen Teilungen oben liegen und der Anfang- oder Endstrich von S unter „*c*“ (O_1) steht. Dann sucht man auf S „*φ*“ auf und findet darüber auf O_1 den Wert von $c\,\sin\varphi = y_2 - y_1$. Über „R—*φ*“ liegt $x_2 - x_1 = c\,\cos\varphi$. Man rechne folgende Tabelle durch:

c	600	212	97,5	46,22	150,8	413	m
φ	27°38°	118°22′	221°34′	305°19′	4°22′	183°16′	
φ	30^{g}70^c	131^{g}52^c	246^{g}18^c	339^{g}24^c	4^{g}85^c	203^{g}63^c	
$x_2 - x_1$	532	—100,7	—73,0	+26,72	150,4	—412	m
$y_2 - y_1$	278	+186,5	—64,7	—37,7	11,48	—23,24	m

(Vgl. Beispiel 23)

Beispiel 70. *Koordinatenumformung.* In einem rechtwinkligen System *X*, *Y* habe ein Punkt *P* die Koordinaten *x*, *y*. Das System wird um seinen Anfangspunkt *O* gedreht, der Drehungswinkel sei *ε*, im neuen System, *X′*, *Y′*, habe P die Koordinaten *x′*, *y′*. Dann ist $x' = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon$; $y' = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon$. In Fig. 5 möge die Nordrichtung, *OX′* mit *OX* den Winkel *ε* = 16°45′ = 18^{g}61^c bilden. Welches sind die Koordinaten der zehn Punkte in neuen System?

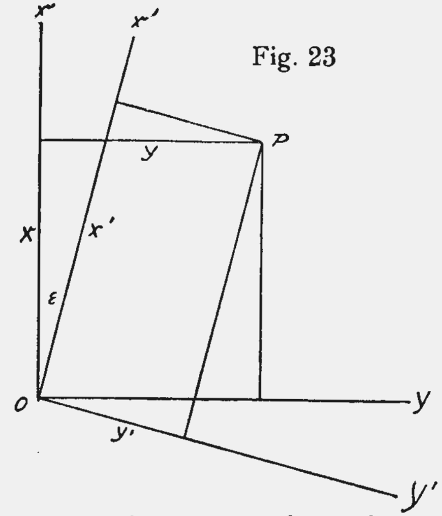


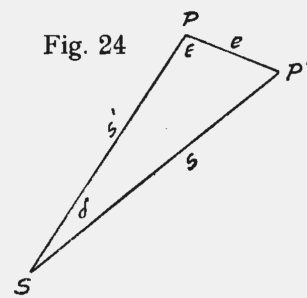
Fig. 23

Lösung: Man findet zunächst *sin ε* = 0,288, *cos ε* = 0,9575. Man stellt ein Rechenschema auf, in das man die Zahlenwerte einträgt:

Punkt i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	27,42	38,22	27,53	22,45	0	—17,51	—29,02	—37,07	—22,63
y_i	12,03	48,74	62,48	82,33	95,00	90,85	77,65	42,68	33,55
$x_i\ cos\ \varepsilon$	26,26	36,60	26,36	21,50	0	—16,77	— 27,80	—35,50	—21,66
$y_i\ sin\ \varepsilon$	3,47	14,05	18,00	23,74	27,38	26,20	22,40	12,30	9,67
x'_i	29,73	50,65	44,36	45,24	27,38	9,43	—5,40	—23,20	—11,99
$-x_i\ sin\ \varepsilon$	—7,90	—11,02	—7,94	—6,47	0	5,05	8,37	10,69	6,52
$y_i\ cos\ \varepsilon$	11,52	46,7	59,8	78,8	91,0	87,0	74,3	40,9	32,1
y'_i	3,62	35,7	51,9	72,3	91,0	92,05	82,7	51,6	38,6

Es wird zunächst *cos ε* auf U_1 fest eingestellt und reihenweise mit $x_1, x_2, \ldots x_9, y_1, y_2, \ldots y_9$ multipliziert. Dann verfährt man ebenso mit *sin ε*. Die letzte Zeile (y'_i) ist abgerundet, um unberechtigte Dezimalen zu unterdrücken. Wenn man die Rechnung logarithmisch durchführt, erkennt man die Schnelligkeit und Bequemlichkeit, mit der der Rechenschieber arbeitet. Die Genauigkeit genügt für eine sehr sorgfältige Zeichnung.

Fig. 24



Beispiel 71 (vgl. Fig. 24.). In *S* sei ein Theodolit aufgestellt, mit dem man den Richtungswinkel *a* (Abweichung von der Nordrichtung) für *PS* ermitteln soll. Da dies wegen dazwischen liegender Hindernisse nicht möglich ist, visiert man *P′* an und erhält den Richtungswinkel *a′*. Bekannt ist die Exzentrizität *e* und der *Winkel ε*. Es sei $a' - a = \delta$; *δ* ist klein. Dann ist $sin\,\delta : sin\,\varepsilon = e : s$, also $\delta \approx \frac{e\,sin\,\varepsilon \cdot \varrho}{s}$. Ist nicht $SP' = s$, sondern $SP = s'$ bekannt, so ist $\delta \approx \frac{e\,sin\,\varepsilon \cdot \varrho}{s' - e\,cos\,\varepsilon}$. Man rechne die folgenden Zahlenbeispiele nach:

a) *P′* rechts von *P;* *e* = 0,55 m; *ε* = 40° 40′ = 45^g 18^c,5; *s* = 98,5 m; *α′* = 27° 13′ 44″ = 30^g 25^c 43^{cc}. Man findet *sin ε* = 0,652; *δ* = 751″ = 12′ 31″ = 0^g 23^c 18^{cc}; *α* = 27° 1′ 13″ = 30^g 2^c 25^{cc} (*δ* wird subtrahiert).

b) *P′* links von *P*; *e* = 1,472 m; *ε* = 54° 42′ = 60^g 78^c; *s′* = 221,5 m; *α* = 30° 5′ 42″ = 33^g 55^c 89^{cc}. Es ist *sin ε* = 0,816, *cos ε* = 0,578, $s' - e\,cos\,\varepsilon = 221,5 - 0,881$ m; $\delta = \frac{1,472 \cdot 0\,816 \cdot \varrho}{220,6}$ = 1123″ = 18′ 43″ = 3470^{cc}; *α* = 30° 24′ 25″ = 33^{g}78^{c}59^{cc} (*δ* wird addiert).

c) P' r e c h t s von P; $e = 0{,}75$ m; $\varepsilon = 128^0 12' = 142^g 44^c$; $s = 155{,}72$ m; $\alpha' = 231^0 42' 14'' = 257^g 44^c 86^{cc}$; es ist $sin\,\alpha = 0{,}786$; $\delta = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}786 \cdot \varrho}{155{,}72} = 781''$ $= 13'1'' = 2310^{cc}$. $\alpha = 231^0 29' 13'' = 257^g 20^c 76^{cc}$. ($\delta$ wird s u b t r a h i e r t).

d) P' l i n k s von P; $e = 2{,}175$ m; $\varepsilon = 146^0 24' = 162^g 67^c$; $s' = 53{,}79$ m; $\alpha' = 16^0 23' 30'' = 18^g 21^c 30^{cc}$. Es ist $sin\,\varepsilon = 0{,}553$, $cos\,\varepsilon = -\,0{,}833$; $s' - e\,cos\,\varepsilon = 53{,}79 + 1{,}812$; $\delta = \frac{2{,}175 \cdot 0{,}553 \cdot \varrho}{55{,}60} = 4460'' = 1^0 14' 20'' = 1^g 37^c 60^{cc}$; $\alpha = 17^0 37' 50'' = 19^g 58^c 90^{cc}$. ($\delta$ wird a d d i e r t).

B e i s p i e l 72. Es sei $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$; wie findet man α?

Lösung: a) a und b seien positiv, b größer als a. Es ist $1 : b = tg\,\alpha : a$; 1 ist aber $tg\,45^0$ oder $tg\,50^g$. Man benutzt die für Proportionen passende Einstellung (vgl. Abschnitt 9d, S.13). Die Zunge wird umgekehrt eingeschoben, man stellt den Endstrich (oder Anfangsstrich) der Tangensteilung über „b" (U_1) und findet „α" auf T (oder S & T) über „a" (U_1). Ist z. B. $a = 2$, $b = 3$, so ist $\alpha = 33^0 41' = 37^g 43^c$. für $a = 2$, $b = 30$ wird $\alpha = 3^0 49' = 4^g 24^c$. Für $a = 5$, $b = 12\,3$ erhält man $\alpha = 22^0 7' = 24^g 58^c$, für $a = 5$, $b = 123$ wird $\alpha = 2^0 19' 40'' = 2^g 58^c 60^{cc}$.

b) Ist b kleiner als a, so bestimmt man β aus $tg\,\beta = \frac{b}{a}$. Da $tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\alpha} = ctg\,\alpha = tg\,(R - \alpha)$ ist, so ist $\beta = R - \alpha$, also $\alpha = R - \beta$.

c) Ist a positiv, b negativ, so liegt α im zweiten Quadranten, man benutzt die Formel $tg\,(2R - \alpha) = -\,tg\,\alpha$. Ist a negativ, b negativ, so liegt α im dritten Quadranten, $tg\,(2R + \alpha) = tg\,\alpha$. Ist a negativ, b positiv, so liegt α im vierten Quadranten, $tg\,(4R - \alpha) = -\,tg\,\alpha$. So erhält man für $tg\,\alpha = \frac{2}{-3}$; $\alpha = 146^0 19' = 162^g 57^c$, für $tg\,\alpha = \frac{-2}{-3}$ $\alpha = 213^0 41' = 237^g 43^c$, für $tg\,\alpha = \frac{-2}{3}$; $\alpha = 326^0{,}19' = 362^g 57^c$.

B e i s p i e l 73. Man benutze die eben angegebenen Methoden, um die Innenwinkel und die Brechungswinkel in Fig. 5 zu finden.

Lösung: Man bestimmt zunächst die Winkel $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_9$, welche die Geraden 0,1, 12, 23, ... 90 mit der x-Achse bilden. Es ist $tg\,\alpha_0 = \frac{12{,}03}{27{,}42}$, $\alpha_0 = 23^0 41' = 26^g 32^c$; $tg\,\alpha_1 = \frac{48{,}74 - 12{,}03}{38{,}22 - 27{,}42} = \frac{36{,}71}{10{,}80}$; $\alpha_1 = 73^0 36' = 81^g 78^c$. So findet man weiter $\alpha_2 = 127^0 53' = 142^g 09^c$; $\alpha_3 = 104^0 21' = 115^g 95^c$; $\alpha_4 = 150^0 34' = 167^g 30^c$; $\alpha_5 = 193^0 20' = 214^g 81^c$; $\alpha_6 = 228^0 54' = 254^g 35^c$; $\alpha_7 = 257^0 2' = 285^g 60^c$; $\alpha_8 = 327^0 42' = 364^g 11^c$; $\alpha_9 = 304^0 0' = 337^g 78^c$.

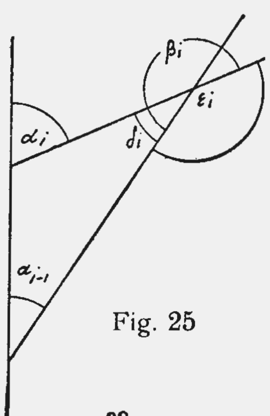


Fig. 25

Fig. 25 zeigt, daß, wenn man $\alpha_i - \alpha_{i-1} = \delta_i$ setzt, der Innenwinkel ε_i beim Punkte $i = 2R - \delta_i$, der Brechungswinkel $\beta_i = 2R + \delta_i$ ist. $\beta_i + \varepsilon_i = 4R$. Man erhält $\varepsilon_1 = 130^0 5' = 144^g 54^c$; $\varepsilon_2 = 125^0 43' = 139^g 69^c$; $\varepsilon_3 = 203^0 32' = 226^g 14^c$; $\varepsilon_4 = 133^0 47' = 148^g 65^c$; $\varepsilon_5 = 137^0 14' = 152^g 49^c$; $\varepsilon_6 = 144^0 26' = 160^g 46^c$; $\varepsilon_7 = 151^0 52' = 168^g 75^c$; $\varepsilon_8 = 109^0 20' = 121^g 49^c$; $\varepsilon_9 = 203^0 42' = 226^g 33^c$; $\varepsilon_{10} = 100^0 19' = 111^g 46^c$. Die Größen β_i lassen sich hieraus leicht finden.

Während hier die Koordinaten gegeben waren und die Seiten (Beispiel 30) und Brechungswinkel aus ihnen gefunden wurden geht man in der Praxis meist umgekehrt vor. Man bestimmt α_0, sowie $s_0, s_1, s_2, \ldots s_9, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_9$ und erhält $x_1 = s_0\,cos\,\alpha_0$, $y_1 = s_0\,sin\,\alpha_0$; $\alpha_1 = \beta_1 + \alpha_0 - 2R$; $\alpha_2 = \beta_2 + \alpha_1 - 2R$ usw. und findet dann $x_2 - x_1 = s_1\,cos\,\alpha_1$, $y_2 - y_1 = s_1\,cos\,\alpha_2$; $x_3 - x_2 = s_2\,cos\alpha_2$, $y_3 - y_2 = s_2\,sin\,\alpha_2$ usw.

B e i s p i e l 74. Es sei $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$. Man bestimme α ähnlich wie in Beisp. 72.

L ö s u n g: Man braucht bei umgekehrter Zunge nur die T-Teilung durch die S-Skala zu ersetzen. Statt U_1 nimmt man einfacher O_1. Ist z. B. $sin\,\alpha = \frac{2}{3}$, so ist die Einstellung: Endpunkt der S-Skala unter „3" (O_1). Ablesung: Unter „2" (O_1) findet man auf S, daß $\alpha = 41^0 50' = 46^g 45^c$. Es kann aber auch $\alpha = 138^0 10' = 153^g 55^c$ sein. Für $a = 5$, $c = 12{,}3$ findet man $\alpha = 24^0 0' = 26^g 65^c$.

Ist $c = 1$, so erhält man die auf S. 37 beschriebene Einstellung.

23. Der Sinussatz

Sind die Seiten eines Dreiecks a, b, c, ihre Gegenwinkel α, β, γ, so ist $sin\,\alpha : a = sin\,\beta : b = sin\,\gamma : c$. Wier benutzen hier das Verfahren, welches wir bei den Proportionen kennengelernt haben (Abschnitt 9 d.) Die umgedrehte Zunge wird so hineingeschoben, daß die Skala S oben liegt. Man stellt (mit dem Läuferstrich) „α" (S) unter „a" (O_1). Dann liegt auch „β" (S) unter „b" (O_1) und „γ" (S) unter „c" (O_1). Beim rechtwinkligen Dreieck ist $\gamma = 90^0 = 100^g$ (Endstrich der S-Skala). Man beachte, daß $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist, also beim rechtwinkligen Dreieck $\alpha + \beta = R$.

a) Das rechtwinklige Dreieck

Die Katheten seien a und b, die Hypotenuse c. Schalten wir zunächst den Fall aus, daß a und b gegeben sind, so ist außer einer Seite auch ihr Gegenwinkel bekannt, so daß die Proportionalitätseinstellung sofort möglich ist.

B e i s p i e l 75. Es sei $c = 29{,}9$ m, $\alpha = 23^0 41' = 26^g 32^c$. Dann ist $\beta = 66^0 19' = 73^g 68^c$. Man stellt „$90^{0}$" = „$100^g$" ($S$) unter „29,9" ($O_1$), sucht α und β auf S auf und findet darüber auf O_1, daß $a = 12{,}03$ m und $b = 27{,}4$ m ist. (Fläche I in Fig. 5). Ebenso kann man die weiteren Koordinaten von Fig. 5 nach der in Beispiel 73 zum Schluß gegebenen Anregung ausrechnen.

B e i s p i e l 76. Zwei Wege, AC und BC, kreuzen sich bei C rechtwinklig. Es ist $AC = 217$ m, ferner mißt man $\angle BAC = \alpha = 40^0 40' = 45^g 18^c$. Wie lang ist BC und wie lang der Verbindungsweg AB?

L ö s u n g: a und b ist gegeben. $\beta = 49^0 20' = 54^g 82^c$. Einstellung: „$\beta$" ($S$) unter „217" ($O_1$). Ablesung: $BC = 186{,}4$ m (O_1) über „α" (S); $AB = 286{,}1$ m (O_1) über „90^0" („100^g") (S).

Ist a und b gegeben, so kann man entweder $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Abschnitt 12,13) oder α aus $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$ (Beispiel 72) berechnen. Die weitere Behandlung erfolgt so' wie vorher beschrieben.

Beispiel 77. $a = 32{,}5$ m, $b = 52{,}8$ m.

L ö s u n g: a) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1056 + 2790} = \sqrt{3846} = 62{,}0$ m. Die übliche Einstellung ergibt $\alpha = 31^0 40' = 35^g 10^c$; $\beta = 58^0 20' = 64^g 90^c$. (Die letzten Stellen sind nicht verbürgt.)

b) $tg\,\alpha = \frac{32\,5}{52{,}8}$; $\alpha = 31^0 36' = 35^g 12^c$, also $\beta = 58^0 24' = 64^g 88^c$. Die Werte sind genauer. Die Einstellung nach Beispiel 76 liefert $c = 62{,}0$ m.

b) Das schiefwinklige Dreieck

1). Sind zwei Winkel und eine Seite gegeben, so berechnet man den dritten Winkel. Dann nimmt man die Proportionalitätseinstellung vor und liest die beiden fehlenden Seiten ab.

B e i s p i e l 78. In dem Dreieck ABC wird $AB = c = 221{,}55$ m durch Messung gefunden. Ferner erhält man mit dem Theodoliten $\sphericalangle CAB = a = 57^0 56' = 64^g\,37^c$ und $\beta = 46^0\,25' = 51^g\,57^c$. Wie groß ist a und b?

L ö s u n g : $\gamma = 2R - (a + \beta) = 75^0\,39' = 84^g\,06^c$. Die Einstellung liefert $a = 193{,}8$ m, $b = 165{,}7$ m.

2). Es seien zwei Seiten, a und b, sowie ein Gegenwinkel a gemessen. Dann bestimmt man mit unserer Einstellung β, hieraus durch Rechnung γ und findet über „γ" (S) auf O_1 „c".

B e i s p i e l 79. $a = 342$ m, $b = 246$ m, $a = 64^0\,15' = 71^g\,39^c$.

L ö s u n g : Man findet zunächst $\beta = 40^0\,20' = 44^g{,}9$, hieraus $\gamma = 75^0\,25' = 83^g{,}3$ und bei unveränderter Zungenstellung über γ, daß $c = 367$ m ist.

B e i s p i e l 80. $a = 96$ m, $b = 62{,}5$ m, $\beta = 31^0\,10' = 34^g\,63^c$.

L ö s u n g : $a = 52^0\,40' = 58^g\,5$. Da β der kleineren Seite gegenüberliegt, kann auch $a = 127^0\,20' = 141^g{,}5$ sein. Die Rechnung wird daher getrennt. **1)** $\gamma = 96^0\,10' = 106^g\,87^c$; $c = 120{,}1$ m. **2)** $\gamma = 21^0\,30' = 23^g\,87^c$; $c = 44{,}3$ m. Es ist eine Zungenverschiebung nötig.

3). Es seien die drei Seiten gegeben. Da kein Winkel bekannt ist, läßt sich die obige Einstellung nicht ohne weiteres durchführen. Man fertigt dann eine rohe Skizze an und entnimmt ihr mit dem Winkelmesser den kleinsten Winkel. Jetzt ist die Einstellung möglich; man findet mit ihr Näherungswerte für die beiden andern. Die Summe muß $180^0 = 200^g$ sein. Ist sie zu klein, so nimmt man für den ersten Winkel einen etwas größeren Wert, der vielleicht für die Winkelsumme ein zu großes Ergebnis liefert. Durch zweckmäßiges Probieren oder durch Interpolation findet man leicht den richtigen Wert des einen und damit auch den der andern Winkel.

B e i s p i e l 81. $a = 62{,}4$ m, $b = 86{,}3$ m, $c = 95{,}1$ m. Die Skizze liefert $a \approx 38^0$. Die Einstellung ergibt $\beta = 58^0\,30'$, $\gamma = 70^0$, also $\sigma = a + \beta + \gamma = 166^0\,30'$. Für $a = 40^0$ erhält man $\beta = 62^0\,45'$, $\gamma = 78^0\,30'$, $\sigma = 181^0\,15'$. Damit σ von $166^0\,30'$ auf $181^0\,15'$, also um $14^0\,45' = 14^0{,}75$ wächst, muß a um 2^0 zunehmen. Der Zuwachs $180^0 - 166\,30' = 13^0{,}5$ wird erzielt, wenn a um $\frac{2^0 \cdot 13{,}5}{14{,}75} = 1^0{,}83 = 1^0 50'$ wächst. Der nächste Näherungswert ist $a = 39^0\,50'$, er ergibt $\beta = 62^0\,20'$, $\gamma = 78^0$, $\sigma = 180^0\,10'$. Größere Genauigkeit kann der Rechenstab nicht liefern.

Rechnet man in Neugrad, so ist etwa $a \approx 42^g$; $\beta = 64^g{,}4$; $\gamma = 76^g{,}8$, $\sigma = 183^g{,}2$, für $a = 45^g$ wird $\beta = 71^g{,}0$, $\gamma = 91^g$, $\sigma = 207^g$, a muß um $\frac{16{,}8 \cdot 3^g}{23{,}8} = 2^g{,}12$ wachsen, wird also gleich $44^g{,}12$. Dann wird $\beta = 69^g{,}0$, $\gamma = 85^g{,}4$, $\sigma = 198^g{,}5$. Nimmt man jetzt $a = 44^g{,}5$ an, so erhält man $\beta = 70^g{,}0$, $\gamma = 87^g{,}6$, $\sigma = 202{,}1$. Die Verbesserung ist $\frac{0{,}38 \cdot 1{,}5}{3{,}6}$, also $a = 44{,}28$. Jetzt wird $\beta = 69^g{,}4$, $\gamma = 86^g{,}2$, $\sigma = 199{,}9$. Die Werte sind innerhalb unserer Genauigkeitsgrenzen endgültig.

Will man dies Näherungsverfahren vermeiden, so setzt man $\frac{a + b + c}{2} = s$ und hat dann $tg\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$, $tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{s\,(s-b)}}$, $tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c)}}$. In unserm Fall ist $s = 121{,}9$ $s - a = 59{,}5$, $s - b = 35{,}6$, $s - c = 26{,}8$, $tg\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{35{,}6 \cdot 26{,}8}{121{,}9 \cdot 59{,}5}} = \sqrt{0{,}1315} = 0{,}3627$, $\frac{a}{2} = 19^0\,55' = 22^g\,14^c$ $a = 39^0\,50' = 44^g\,28^c$. β und γ bestimmt man entweder nach den angegebenen, Formeln oder nach der bisherigen Einstellung. $a + \beta + \gamma$ muß $180^0 = 200^g$ sein.

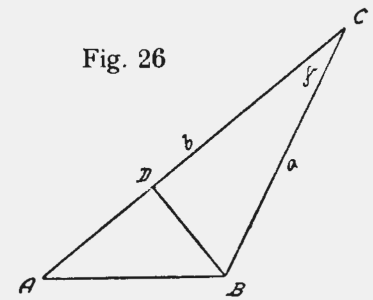
4) Es seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben.

B e i s p i e l 82. Es sei $a = 49$ m, $b = 70$ m, $\gamma = 24^0\,20' = 27^g\,04^c$.

L ö s u n g : Der Zeichnung entnehmen wir, daß $c \approx 32$ m ist. Dann ist nach dem Sinussatz $a = 39^0\,7' = 43^g{,}5$, $\beta = 180^0 - 64^0\,20' = 115^0\,40' = 128^g{,}5$, also $\sigma = a + \beta + \gamma = 179^0\,7' = 199^g{,}04$. Für $c = 33$ m wird $a = 37^0\,43' = 41^g{,}9$, $\beta = 119^0\,5' = 132^g{,}3$, $\sigma = 181^0\,8' = 201^g{,}24$. Als Zuwachs für c erhält man (vgl. Beispiel 81) $1 \cdot \frac{53'}{2^0\,1'} = 1 \cdot \frac{0{,}96}{2{,}20} = 0{,}44$, also $c = 32{,}44$ m. Bei Annahme dieses Wertes wird $a = 38^0\,30' = 42^g{,}8$, $\beta = 117^0\,15' = 130^g{,}3$, $\sigma = 180^0\,5' = 200^g{,}14$. Innerhalb unserer Genauigkeitsgrenzen sind die letzten Zahlen endgültig.

Will man die Wiederholungsrechnung vermeiden, so fällt man von B auf AC das Lot BD. Dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD, daß $BD = a\,\sin\gamma = 20{,}2$ m, $CD = a\,\cos\gamma = 44{,}6$ m ist. Jetzt behandelt man das rechtwinklige Dreieck ABD ($AD = AC - CD = 25{,}4$ m) und findet $AB = \sqrt{25{,}4^2 + 20{,}2^2} = 32{,}44$, $tg\,ABD = \frac{25{,}4}{20{,}2}$, $\sphericalangle ABD = 51^0\,30' = 57^g{,}2$ $\sphericalangle CBD = R - \gamma = 65^0\,40' = 72^g{,}96$, $\beta = 117^0\,10' = 130^g{,}2$, $a = 38^0\,30' = 42^g{,}8$.

Fig. 26



Nach einfacher mathematischer Umformung folgt aus der Figur auch, daß $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma = 2401 + 4900 - 6250 = 1051$, $c = 32{,}4$ ist. Jetzt läßt sich der Sinussatz benutzen.

24. Das Rückwärtseinschneiden

Wir haben die trigonometrischen Grundaufgaben bisher absichtlich aus der gesamten geodätischen Rechnung herausgeschält, um die Eignung des Rechenschiebers für ihre Lösung bei mäßiger Genauigkeit darzutun. Auch beim *Rückwärtseinschneiden* wollen wir zunächst ebenso vorgehen.

Beim *Vorwärtseinschneiden* wird von Punkten, deren Lage gegeben ist, nach dem zu bestimmenden Punkte hinvisiert. Dieser Fall liegt in Beispiel 78 vor. Beim *Rückwärtseinschneiden* soll die Lage des Punktes, auf dem der Theodolit steht, dadurch ermittelt werden. daß man mindestens drei bekannte Punkte anvisiert. In Fig. 27 ist A, M, B festgelegt, daher kennt man auch $MA = a$, $MB = b$ und $\sphericalangle AMB = \gamma$. Von P aus mißt man $\sphericalangle APM = a$ und $\sphericalangle BPM = \beta$. Gesucht sind die Abstände $PA = s_a$. $P_b = s_b$, $PM = s$.

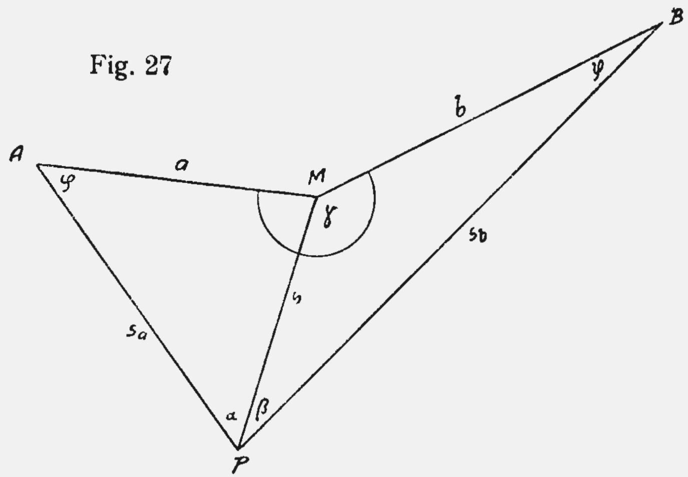
Man bestimmt zunächst φ und ψ. Es ist $\varphi + \psi + a + \beta + \gamma = 4R$, also:

1) $\varphi + \psi = 4R - (a + \beta + \gamma)$.

Nach dem Sinussatz ist $\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{s}{a}$; $\frac{\sin\psi}{\sin\beta} = \frac{s}{b}$, also $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$. Man setzt

2) $tg\,\mu = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$. Rechts treten nur bekannte Stücke auf. Es ist

Fig. 27



dann $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{1}{tg\,\mu} = \frac{\cos\mu}{\sin\mu}$; $\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\cos\mu - \sin\mu}{\cos\mu + \sin\mu} = \frac{\sin(R-\mu) - \sin\mu}{\sin(R-\mu) + \sin\mu}$. Da $\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$ ist,

so hat man $$\frac{2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{2\sin\frac{R-2\mu}{2}\cos\frac{R}{2}}{2\sin\frac{R}{2}\cos\frac{R-2\mu}{2}};$$

$2\sin\frac{R}{2} = 2\cos\frac{R}{2} = \sqrt{2}$, also $\frac{tg\frac{\varphi-\psi}{2}}{tg\frac{\varphi+\psi}{2}} = tg\left(\frac{R}{2} - \mu\right)$, mithin gilt die Formel

3) $tg\,\frac{\varphi-\psi}{2} = tg\,\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot tg\left(\frac{R}{2} - \mu\right)$.

$\frac{\varphi-\psi}{2}$ ist ein positiver oder negativer spitzer Winkel, der jetzt bekannt ist. In Verbindung mit $\frac{\varphi+\psi}{2}$ erhält man φ und ψ. Dann liefert der Sinussatz die Gleichungen

4) $\frac{s}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$; $\frac{s}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$; 5) $\frac{s_a}{a} = \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{s_b}{b} = \frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin\beta}$

Liegt eine Karte vor, so kann man auf ihr die Lage von P dadurch bestimmen, daß man mit s_a um A, mit s_b um B und mit s um M einen Kreis beschreibt. Die drei Kreise müssen sich in einem Punkte P schneiden, was zur Kontrolle der Rechnung dient.

Beispiel 83 Es sei $a = 74{,}1$ m; $b = 103{,}8$ m; $\gamma = 213^\circ 35' = 237^g{,}31$; $\alpha = 51^\circ 40' = 57^g 41^c$; $\beta = 28^\circ 15' = 31^g 39^c$.

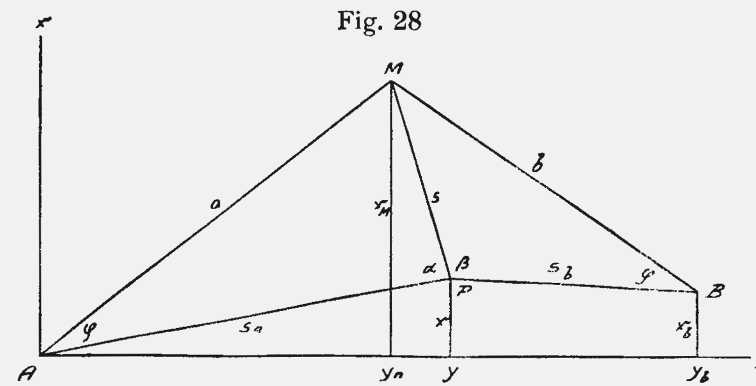
Lösung: 1) $\psi + \varphi = 66^\circ 30' = 73^g 89^c$.

2) $a\sin\beta = 35{,}1$ und $b\sin\alpha = 81{,}4$ wird so bestimmt, wie in Beispiel 69 beschrieben. Aus $tg\,\mu = \frac{35{,}1}{81{,}4}$ findet man nach Beispiel 72, daß $\mu = 23^\circ 18' = 25^g{,}9$ ist; $\frac{R}{2} - \mu = 21^\circ 42' = 24^g{,}1$.

3) Man stellt den Endstrich von T über den von U_1 und setzt den Läuferstrich auf $\frac{\varphi+\psi}{2}$ (T). Ohne den darunter auf U_1 stehenden Wert $\left(tg\,\frac{\varphi+\psi}{2}\right)$ abzulesen, stellt man den Endstrich von T darüber und verschiebt den Läuferstrich auf $\frac{R}{2} - \mu$ (T). Darunter steht auf U_1 das Produkt $tg\,\frac{\varphi+\omega}{2}\cdot tg\left(\frac{R}{2} - \mu\right)$. Auch dies liest man nicht ab, sondern bringt wieder die Endstriche von T und U_1 zur Deckung. Jetzt findet man unter dem Läuferstrich den Winkel, dessen Tangente gleich dem genannten Produkt ist; $\frac{\varphi-\psi}{2} = 14^\circ 37' = 16^g{,}25$. Aus $\frac{\varphi+\psi}{2} = 33^\circ 15' = 36^g{,}94$ und $\frac{\varphi-\varphi}{2}$ findet man durch Addition $\varphi = 47^\circ 52' = 53^g{,}19$ und durch Subtraktion $\psi = 18^\circ 38' = 20^g{,}69$.

4) $\sin\alpha : a = \sin\varphi : s$. Durch Proportionalitätseinstellung ergibt sich $s = 70{,}0$ m. Die Einstellung $\sin\beta : b = \sin\psi : s$ bestägt das Ergebnis.

Fig. 28



5) und 6) $s_a = 93{,}2$ m und $s_b = 160{,}1$ m werden entsprechend gefunden.

Beispiel 84. Die Punkte A, B und M seien durch ihre Koordinaten in einem rechtwinkligen System gegeben, dessen x-Achse nach Norden und dessen y-Achse nach Osten zeigt. $x_a = o$, $y_a = o$; $x_b = 180$ m. $y_b = 1762$ m; $x_m = 745$ m, $y_m = 936{,}5$ m. Gemessen wird $\alpha = 84^0 8' = 93^g 48^c$, $\beta = 109^0 0' = 121^g 12^c$. Welches sind die Koordinaten von P?

Lösung: $a = \sqrt{(x_m - x_a)^2 + (y_m - y_a)^2} = 1197$ m;

$b = \sqrt{(x_m - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2} = 1000$ m. Der Richtungswinkel $xAM = (AM)$ ist gegeben durch $tg\,(AM) = \dfrac{y_m - y_a}{x_m - x_a}$, ebenso ist $tg\,(BM) = \dfrac{y_m - y_b}{x_m - x_b}$; $\gamma = (AM) - (BM)$.

Nach diesen Formeln findet man $(AM) = 51^0 30' = 57^g 22^c$, $(BM) = 304^0 23' = 338^g 21^c$, also $\gamma = 107^0 7' = 119^g{,}01$. Rechnet man nach dem im vorigen Beispiel entwickelten Verfahren, so erhält man $\mu = 48^0 40' = 54^g{,}08$; $\varphi = 27^0 46' = 30^g 85$; $\psi = 32^0 0' = 35^g{,}55$; $s = 560{,}5$ m, $s_a = 1116$ m, $s_b = 666$ m.

Es ist $(AP) = (AM) + \varphi = 79^0 16' = 88^g{,}07$; $(BP) = (BM) - \psi = 272^0 23' = 302^g{,}66$; $(MP) = (BP) - \beta = (AP + \alpha) = 163^0 23' = 181^g{,}54$; $x = s_a \cos (AP) = x_b + s_b \cos (BP) = x_m \cos (MP) = 208$ m; $y = s_a \sin (AP) = y_b + s_b \sin (BP) = y_m + s\,.\,\sin (MP) = 1097$ m. Die mehrfache Rechnung dient zur Kontrolle. Unser Beispiel zeigt, daß der Rechenschieber auch die geodätische Rechnung bis zum Ende durchführen kann, wenn seine Genauigkeit ausreicht.

25. Die tachymetrischen Teilungen

Bei verschiedenen Rechnungen, besonders in der Tachymetrie, kommen die Ausdrücke $\sin \alpha \cos \alpha$ und $\cos^2 \alpha$ vor. Die zugehörigen Skalen finden sich auf der Vorderseite der Zunge. Bringt man den Anfangs- und Endstrich der Zunge mit den entsprechenden Strichen der festen Skala zur Deckung, so braucht man nur auf den mit $\sin \alpha \cos \alpha$ und $\cos^2 \alpha$ bezeichneten Teilungen den gegebenen Winkel einzustellen, dann steht über ihm auf O_1 der zugehörige Funktionswert.

a) sin α cos α. Wächst α von $0°$ (0^g) bis $45°$ (50^g), so wächst $\sin \alpha \cos \alpha$ $\left(= \frac{1}{2} \sin 2\,\alpha\right)$ von 0 bis 0,5.

Die mittlere Teilung beginnt mit $\alpha = 34'22'' = 0^g 63^c 65^{cc}$ $(\sin \alpha \cos \alpha = 0{,}01)$ und endet mit $\alpha = 5°46' = 6^g 41^c$ $(\sin \alpha \cos \alpha = 0{,}1)$. Die für diese Winkel auf O_1 abgelesenen Funktionswerte fangen also mit 0,0 an.

Die obere Teilung geht von $\alpha = 5°46' = 6^g 41^c$ $(\sin \alpha \cos \alpha = 0{,}1)$ bis zu $\alpha = 45° = 50^g$ $(\sin \alpha \cos \alpha = 0{,}5)$. Die Funktionswerte dieser Winkel beginnen mit 0,.

Es ist z. B. $\sin 2° \cos 2° = \sin 2^g 22^c{,}2 \cos 2^g 22^c{,}2 = 0{,}03488$, dagegen $\sin 22°7' \cos 22°7' = \sin 24^g 57^c \cos 24^g 57^c = 0{,}3488$. Mit Benutzung der trigonometrischen Teilungen bestätigt man leicht die Richtigkeit dieser Ergebnisse.

Ist α kleiner als $34'22'' = 0^g 63^c 65^{cc}$, so ist $\cos \alpha$ praktisch gleich 1, also $\sin \alpha \cos \alpha \approx \sin \alpha \approx \frac{\alpha}{\varrho}$. So erhält man für $\alpha = 27' = 0^g 50^c$ $\sin \alpha \cos \alpha \approx \frac{27}{3438} = \frac{50}{6366} = 0{,}00785$.

Daß unsere Skalen nur bis $\alpha = 45° = 50^g$ gehen, ist für die Tachymetrie belanglos, da dort nur diese Winkel in Betracht kommen. Ist bei anderen Rechnungen α größer, so können die Funktionswerte mit den vorhandenen Teilungen leicht ermittelt werden. Wir bezeichnen der Kürze wegen $\sin \alpha \cos \alpha$ mit $S\,(\alpha)$. Dann ist $S\,(R - \alpha) = \sin\,(R - \alpha) \cos\,(R - \alpha) = \cos\,\alpha\,\sin\,\alpha = S\,(\alpha)$. Die Funktionswerte für Komplementwinkel sind also gleich. Ferner ist $S\,(R + \alpha) = -S\,(\alpha)$, $S\,(2\,R + \alpha) = S\,(\alpha)$, $S\,(3\,R + \alpha) = -S\,(\alpha)$. Z. B. wird $\sin 117° \cos 117° = \sin 130^g \cos 130^g = -0{,}4045$, $\sin 220° \cos 220° = \sin 244^g{,}44 \cos 244^g{,}44 = 0{,}4925$

b) cos² α. Wächst α von $0°$ (0^g) bis $45°$ (50^g), so fällt $\cos^2 \alpha$ $\left(= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\,\alpha)\right)$ von 1 auf 0,5. Die Skala $\cos^2$ ist also rückläufig, sie füllt gerade die Lücke aus, welche die $\sin\cos$-Teilung auf O_1 gelassen hat. Auf der Überteilung links (rot) finden sich die ersten Winkel der $\cos^2$-Skala noch einmal, die Funktionswerte werden auf der linken Überteilung von 0_1 abgelesen. Jede Ablesung über der $\cos^2$-Teilung muß mit O, beginnen.

Bei kleinen Winkeln ist die Einstellung auf $\cos^2$ schwierig, weil sich dort die Skalenteile eng zusammendrängen. Es ist aber $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Für kleine Winkel ist $\sin \alpha \approx \sin \alpha \cos \alpha$, da $\cos \alpha \approx 1$ ist. Man erhält $\cos^2 \alpha \approx 1 - (\sin \cos \alpha)^2$. Der letzte Ausdruck läßt sich sehr genau finden, wenn man von $\sin \alpha \cos \alpha$ nicht auf O_1, sondern auf Q übergeht. Es sei z. B. $\alpha = 4°30' = 5^g$. Dann ist $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0{,}00612$, $\cos^2 \alpha = 0{,}99388$. Die Näherungsformel stimmt um so genauer, je kleiner α ist, hier weit besser als die direkte Ablesung.

Kürzt man $\cos^2 \alpha$ durch die Bezeichnung $C\,(\alpha)$ ab, so findet man leicht, daß $C\,(R - \alpha) = \cos^2\,(90° - \alpha) = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - C(\alpha)$ ist. Die Funktionen der Komplementwinkel sind hier also nicht gleich, sondern ergänzen sich zu 1. Ferner hat man $C\,(R + \alpha) = 1 - C\,(\alpha)$; $C\,(2\,R + \alpha) = C\,(\alpha)$; $C\,(3\,R + \alpha) = 1 - C\,(\alpha)$. Z. B. ist $\cos^2 63° = \cos^2 70^g = 1 - 0{,}794 = 0{,}206$; $\cos^2 117° = \cos^2 130^g = 0{,}206$; $\cos^2 207° = \cos^2 230^g = 0{,}794$; $\cos^2 297° = \cos^2 330^g = 0{,}206$

Beispiel 85. Zur Einübung bringen wir ein Beispiel aus der elementaren Mechanik. Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit c *m/sec* unter dem Winkel α (gegen dis Horizontale) geworfen, so ist die Wurfweite $w = \frac{2\,c^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$, die Steighöhe $h = \frac{c^2}{2\,g} \sin^2 \alpha$. Der Luftwiderstand bleibt hierbei unberücksichtigt. Es sei $c = 20$ m/sec, $g = 9{,}81$ m/sec², $\alpha = 18^0$ (20^g), 36^0 (40^g), 45^0 (50^g), 54^0 (60^g), 72^0 (80^g) usw. Man berechne w und h.

Lösung: $w = 81{,}55 \sin \alpha \cos \alpha$; $h = 20{,}39 \sin^2 \alpha$.

a) Man stellt den Endstrich der Zunge unter „81,55" (O_1). Verschiebt man jetzt den Läuferstrich auf „α" (sin cos), so multiplizert man dadurch 81,55 mit $\sin \alpha \cos \alpha$, das Ergebnis steht auf O_1. Man erhält:

α	18°(20g)	36°(40g)	45°(50g)	54°(60g)	72°(80g)	90°(100g)	108°(120g)	126°(140g)
w	23,96	38,78	40,8	38,78	23,96	0	− 23,96	− 38,78 m

usw.

b) Es ist $h = 20{,}39 - 20{,}39 \cos^2 \alpha$. Einstellung: „20,39" (O_1) über „O" ($\cos^2$) Ablesung: „20,39 $\cos^2 \alpha$" (O_1) über „α" ($\cos^2 \alpha$). Das Ergebnis wird von 20,39 abgezogen. So verfährt man für die Werte von α zwischen O und $45^0(50)^g$, man erhält

α	18°(20g)	36°(40g)	45°(50g)
h	1,95	7,04	10,20 m

Ist a größer als $\frac{1}{2} R$, so setzt man $h = 20{,}39 \cos^2 (R - a)$. Die Zunge bleibt in der bisherigen Stellung stehen, die Ergebnisse können sofort abgelesen werden:

a	$45^0(50^g)$	$54^0(60^g)$	$72^0(80^g)$	$90^0(100^g)$
h	10,20	13,34	18,44	20,39 m

Die Berechnung für Winkel zwischen $90^0(100^g)$ und $180^0(200^g)$ bietet keine Schwierigkeit.

B e i s p i e l 86. Man löse dieselbe Aufgabe für $c = 30$ m/sec, $g = 9{,}81$ m/sec² $a = 1^0, 2^0, 3^0 \ldots 10^0$ $(1^g{,}111)$; $2{,}^g222$; $3^g{,}333 \ldots 11^g{,}111$).

L ö s u n g : $w = 183{,}5 \sin a \cos a$; $h = 45{,}87 \sin^2 a$.

a.) Man stellt den Anfangsstrich der Zungenteilung unter „183,5" (O_1), sucht die Winkel auf der mittleren Zungenteilung auf und findet auf O_1:

a	$1^0(1^g{,}111)$	$2^0(2^g{,}222)$	$3^0(3^g{,}333)$
w	3,202	6,40	9,59 m

Jetzt nimmt man einen Zungenrückschlag vor und erhält:

a	$4^0(4^g{,}444)$	$5^0(5^g{,}556)$
w	12,77	15,93 m

Da für diese Winkel, die auf der mittleren Skala zu finden sind, $\sin a \cos a$ zwischen 0,01 und 0,1 liegt, so muß das Produkt größer als 1,835 und kleiner als 18,35 sein. Das Komma ist also richtig gesetzt. Für die größeren Winkel braucht man die obere *sin-cos*-Teilung, das Ergebnis muß zwischen 18,35 und 91,75 liegen; man liest ab:

a	$6^0(6^g{,}667)$	$7^0(7^g{,}778)$	$8^0(8^g{,}889)$	$9^0(10^g)$	$10^0(11^g{,}111)$
w	19,07	22,19	25,29	28,35	31,38 m

b) Für kleine Winkel ist $\sin^2 a \approx \sin^2 a \cos^2 a$, Man setzt „1" ($U_2$) über 4,587 ($Q$) und benutzt wie vorher die *sin cos*-Teilungen, wobei einmal ein Zungenrückschlag nötig ist. Die Ergebnisse findet man auf Q. Da für kleine Winkel $\sin a \approx \frac{a}{\varrho} \approx \frac{a}{60}$ ist, so hat h den Näherungswert $h \approx \frac{45\ a^2}{3600} \approx \frac{a^2}{80}$. Es ergibt sich:

a	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0
h	0,01400	0,0559	0,1256	0,222	0,346	0,495	0,671	0,872	1,096	1,340

Wir haben hierbei eine *Näherungsformel* benutzt. Um die Ergebnisse mit den genauen Werten zu vergleichen, drehen wir die Zunge um und benutzen statt der beiden Skalen für *sin-cos* die Teilungen *S&T* und $\bar{S}$, welche, auf Q bezogen, $\sin^2 a$ liefern. Es entsteht die Tabelle:

a	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0
h	0,01398	0,0559	0,1256	0,223	0,348	0,501	0,681	0,889	1,122	1,383 m

Im ungünstigsten Fall, für $a = 10^0$, beträgt der Fehler $\frac{100 \cdot 0{,}043}{1{,}383} = 3{,}1\%$.

Würde man $h = 45{,}87 - 45{,}87 \cos^2 a$ setzen, so könnte man die $\cos^2$-Teilung benutzen, die Ergebnisse würden bei unseren kleinen Winkeln aber, wie einige Proben zeigen, sehr ungenau werden.

B e i s p i e l 87. *Die Tachymetrie* löst die Aufgabe, von einem bekannten Standort A aus die horizontale Lage und die Höhe des zu bestimmenden Punktes P gleichzeitig zu ermitteln. Am Horizontalkreis des Theodoliten mißt man den Horizontalwinkel, am Vertikalkreis den Höhenwinkel a. Die Entfernung $AP = s$ bestimmt man mit einem Distanzmesser. Der Reichenbachsche besteht aus einem Fernrohr, in dessen Gesichtsfeldblendebene zwei Fäden angebracht sind, die in gleichen Abständen parallel zum Horizontalfaden verlaufen. Ihr Abstand sei p, die Brennweite des Objektivs f. An der zu untersuchenden Stelle des Geländes wird eine Latte senkrecht aufgestellt und anvisiert. Der Horizontalfaden bedecke auf ihrer Teilung den Punkt P, die Parallelfäden die Punkte P_1 und P_2. Deren Abstand (Lattenschnitt) kann also auch abgelesen werden, er sei a (Fig. 29). Dann ist

1. $s = c + ak \cos a$. Der horizontale Abstand ist
2. $D = (c + ak) \cos^2 a = c + ak - \Delta$, wobei

3. $\Delta = (c + ak) \sin^2 a \approx (c + ak) \sin^2 a \cos^2 a \approx (c + ak) \cdot \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2$ ist.
4. $h = (c + ak) \sin a \cos a = D \operatorname{tg} a \approx (c + ak) \cdot \frac{a}{\varrho}$. Darin ist die kleine Konstante c gleich dem Abstand zwischen dem äußeren Brennpunkt des Objektivs und der Stehachse des Instruments. Sie kann durch direkte Messung

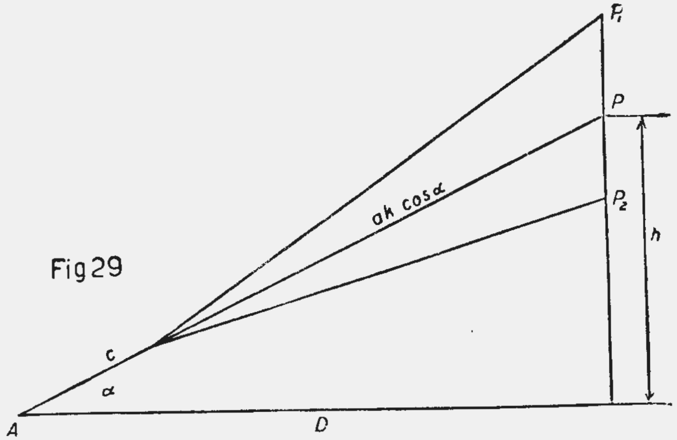


Fig 29

ermittelt werden und ist von der Größenordnung 0,5 m. Die große Konstante k ist gleich $\frac{f}{p}$. Der Fadenabstand p wird vom Mechaniker so gewählt, daß $k \approx 100$ oder 200 ist. Da sich das nicht in aller Strenge durchführen läßt, so wird der genaue Wert von k durch Versuche bestimmt.

Man sieht, daß hier die *sincos*- und die *cos²*-Teilung mit großem Vorteil gebraucht werden kann. Da tachymetrische Messungen nur bis zu Entfernungen von 300 bis 400 m vorgenommen werden, genügt die Genauigkeit des Rechenschiebers.

Man rechne folgende Zahlenbeispiele nach:

	1	2	3	4	5	6	7	
c	0,52	0,485	0,49	0,55	0,46	0,53	0,50	
k	100	200	99,7	201,8	201,5	101	98,15	m
a	0,826	0,315	1,028	0,748	1,52	0,716	1,057	m
a	$23^0 20'$	$10^0 25'$	$35^0 17'$	$8^0 45'$	$3^0 15'$	$-7^0 12'$	$-0^0 20'$	
a	$25^g 93^c$	$11^g 57^c$	$39^g 20^c$	$9^g 72^c$	$3^g 61^c$	$-8^g 0^c$	$-0^g 37^c$	
$c + ak$	83,12	63,485	102,98	151,50	306,28	72,316	104,24	m
h	30,2	11,28	48,5	22,78	17,34	− 8,99	− 0,606	m
D	70,1	61,4	68,6	148,0	305	71,2	104,2	m
Δ	13,04	2,07	34,35	3,50	0,98	1,136	0	m
$c + ak - \Delta$	70,08	61,415	68,63	148,00	305,30	71,18	104,24	m

B e i s p i e l 88. Die Lage eines Punktes P kann dadurch bestimmt werden, daß man von ihm aus die Richtungen zu n (mehr als 3) festen Punkten $P_1, P_2 \ldots P_i \ldots P_n$ mißt. Bei den A u s g l e i c h s r e c h n u n g e n treten Ausdrücke von der Form $a_i = \frac{\sin \varphi_i^0}{s_i^0} \varrho$ und $b_i = -\frac{\cos \varphi_i^0}{s_i^0} \varrho$ auf. Darin ist φ_i^0 der Näherungswert des Winkels, den die Linie PP_i mit der x-Achse bildet und s_i^0 der nähe-

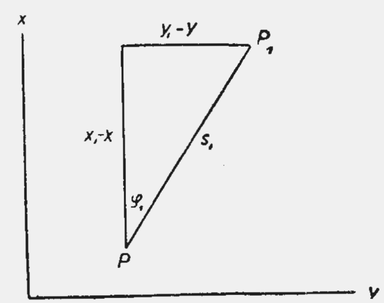


Fig.30

rungsweise gefundene Abstand PP_i. Man kann auch schreiben: $a_i = \frac{\sin \varphi_i^0 \cos \varphi_i^0 \cdot \varrho}{s_i^0 \cos \varphi_i^0} = \frac{\sin \varphi_i^0 \cos \varphi_i^0 \cdot \varrho}{x_i - x_0}$; $b_i = - \frac{\sin \varphi_i^0 \cos \varphi_i^0 \cdot \varrho}{y_i - y_0}$ oder $a_i = \frac{s_i^0 \sin \varphi_i^0 \cdot \varrho}{(s_i^0)^2} = \frac{(y_i - y_0)\, \varrho}{(s_i^0)^2}$; $b_i = - \frac{(x_i - x_0) \cdot \varrho}{(s_i^0)^2}$; x_i, y_i sind die Koordinaten von P_i, x_0 und y_0 die näherunsgweise richtigen Koordinaten von P; $tg\ \varphi_i^0 = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}$.

Wir entnehmen aus Eggert, Einführung in die Geodäsie, die (abgerundeten) Koordinaten

	P_1	P_2	P_3	P_4	P
x	— 9274	— 7621	— 8335	— 10155	$x_0 = -8792$
y	+ 544	+ 2577	+ 4903	+ 3614	$y_0 = +3289$

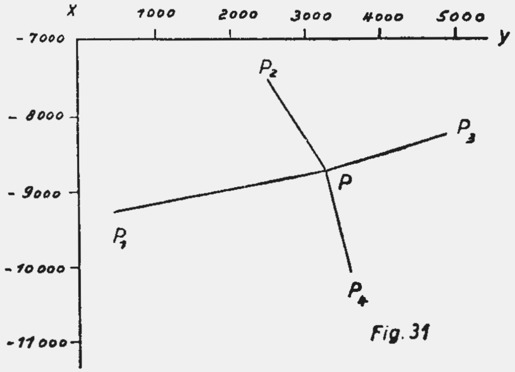


Fig. 31

Es ist $tg\ \varphi_1^0 = \frac{544 - 3289}{-9274 + 8792} = \frac{-2745}{-482} = 5{,}70$; $\varphi_1^0 = 180^0 + 80^0 2' = 260^0 2'$ ($\varphi_1^0 = 200^g + 88^g 93^c = 288^g 93^c$). Ebenso findet man $\varphi_2^0 = 328^0 42' = 365^g 22^c$; $\varphi_3^0 = 74^0 11' = 82^g 43^c$; $\varphi_4 = 166^0 35' = 185^g 10$. Ferner ist s_1^0 2800 m, $s_2^0 = 1370$ m, $s_3^0 = 1677$ m, $s_4^0 = 1401$ m, $\sin \varphi_1^0 \times \cos \varphi_1^0 = 0{,}1705$; $\sin \varphi_2^0 \cos \varphi_2^0 = -0{,}444$; $\sin \varphi_3^0 \cos \varphi_3^0 = 0{,}262$; $\sin \varphi_4^0 \cos \varphi_4^0 = 0{,}2255$. Bei der praktischen Durchführung der Rechnuug braucht man die angegebenen Werte von $\sin \varphi \cos \varphi$ nicht abzulesen. Man stellt den Anfangs- oder Endstrich der *sin-cos*-Teilung unter „ϱ“ (O_1), sucht φ auf und würde darüber auf O_1 $\varrho \sin \varphi \cos \varphi$ finden. Unter den Läuferstrich stellt man „$x_i - x_0$“ oder „$y_i - y_0$“ (U_2), dann steht „a“ oder „b“ auf U_1 unter „1“ oder „10“ (U_2). Benutzt man die alte Gradteilung, so findet man $a_1 = -72{,}9$, $b_1 = 12{,}8$; $a_2 = -78{,}18$, $b_2 = -128{,}6$; $a_3 = 118{,}3$ $b_3 = -33{,}5$; $a_4 = 34{,}14$, $b_4 = 143{,}2$. Bei der neuen Teilung wird $a_1 = -225$, $b_1 = 39{,}5$; $a_2 = 241{,}2$, $b_2 = -397$; $a_3 = 365$, $b_3 = -103{,}4$; $a_4 = 105{,}4$, $b_4 = 442$.

26. Die logarithmische Skala

Die Skala L ist die einzige auf dem Rechenschieber, die gleichmäßig geteilt ist. Sie geht von 0,0 bis 1,0. Überdeckt man eine Zahl a ($a = 1$ bis 10) auf O_1 oder U_1 mit dem Läuferstrich, so findet man unter diesem auf L den Wert von $lg\ a$. Z. B. ist $lg\ 2 = 0{,}301$, $lg\ 6 = 0{,}778$ usw. Ist $lg\ x = 0{,}5$, so lehrt die Umkehrung des Verfahrens, daß $x = 3{,}162$ ist, zu $lg\ y = 0{,}703$ gehört $y = 5{,}05$ usw. Die Logarithmen von Zahlen, die sich nicht durch die Ziffernfolge, sondern nur durch die Kommastellung unterscheiden, haben denselben Dezimalbruch (Mantisse), aber andere Kennziffern. So ist $lg\ 3 = 0{,}477$, $lg\ 30 = 1{,}477$, $lg\ 300 = 2{,}477 \ldots$, $lg\ 0{,}3 = 0{,}477 - 1 = 9{,}477 - 10$, $lg\ 0{,}03 = 0{,}477 - 2 = 8{,}477 - 10$ usw. Da die Kennziffer ohne weiteres feststeht, so kann man mit Hilfe unserer Skala den Logarithmus jeder beliebigen Zahl aufsuchen und zu jedem gegebenen Logarithmus den zugehörigen Numerus finden.

So ist z. B. $lg\ 4140 = 3{,}617$; zu $lg\ x = 0{,}880 - 3$ gehört $x = 0{,}00759$ usw.

Auch die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen erhält man leicht. Man kehrt die Zunge um, bringt sie in die Anfangsstellung, setzt den Läuferstrich auf „a“ der betreffenden Teilung und liest den Logarithmus der Funktion auf L ab. Für die Skala S und T ist seine Kennziffer 0 — 1 oder 9 — 10, für S & T 0 — 2 oder 8 — 10. So erhält man: $lg \sin 20^\circ = lg \sin 22^g 22^c = 9{,}534$; $lg\ tg\ 20^\circ = lg\ tg\ 22^g 22^c = 9{,}561$. Ist $a = 2^\circ 42' = 3^g$, so ist $lg \sin a \approx lg\ tg\ a = 8{,}673$. Ferner hat man für $a = 20^\circ = 22^g 22^c$ $lg \cos a = lg \sin 70^\circ = lg \sin 77^g 78^c = 9{,}973$; $lg\ ctg\ a = lg \left(\frac{1}{tg\ a}\right) = - lg\ tg\ a = 0{,}439$. Für $a = 2^\circ 42' = 3^g$ wird $lg \cos a \approx 0$, $lg\ ctg\ a = 1{,}326$. Man bilde selbst weitere Beispiele und vergleiche sie mit einer Logarithmentafel.

Bei Benutzung der Skala L ersetzt der Rechenschieber eine dreistellige logarithmisch-trigonometrische Tafel.

Beispiel 89. **Kontrolle logarithmischer Rechnungen.**

Ist eine Rechnung logarithmisch ausgeführt, so ist es wertvoll, sie auf andere Weise, wenn auch mit verminderter Genauigkeit, nachzuprüfen. Es sei z. B. $tg\ a = \frac{a}{b}$.

Logarithmische Rechnung:

$lg\ a = 1{,}36173$
$lg\ b = 1{,}54407$
$lg\ tg\ a$ 9,81766
$\alpha = 33^0 18' 39''$
$a = 37^g 01^c 20^{cc}$

Mit der Skala L finden wir $a = 23{,}0$, $b = 35{,}0$. Durch U_1 und U_2 stellt man fest, daß $\frac{a}{b} = 0{,}657$ ist. Für $tg\ a = 0{,}657$ (U_1) findet man auf T, daß $a = 33^0 19' = 37^g 01^c$ ist. Sucht man „818“ auf L auf, so ergibt der Vergleich mit T denselben Winkel. Die Probe stimmt.

Beispiel 90. **Die barometrische Höhenmessung.**

An einem Punkte P_1 mißt man den Barometerstand P_1 *mb* und die Temperatur t_1^0, an einem höher gelegenen Orte P_2 findet man p_2 *mb* und t_2^0. P_1 möge h_1 *m*, P_2 h_2 *m* über dem Meeresspiegel liegen. Dann ist, wenn wir das Temperaturmittel $\frac{1}{2}(t_1 + t_2) = t_m$ setzen und den mittleren Barometerstand $p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ nennen, der Höhenunterschied

$h_2 - h_1 = (18400 + 67\ t_m)\ lg \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ Meter, wofür man näherungsweise

$h_2 - h_1 \approx (7990 + 29\ t_m) \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_m}$ setzen kann.

Ist h_1 bekannt, so kann aus der Höhendifferenz h_2 gefunden werden. Es sei z. B. $h_1 = 512$ m, $t_1 = 19^0$, $p_1 = 953{,}4$ *mb*, $t_2 = 13^0$, $p_2 = 900$ *mb*. Dann ist $18400 + 67\ t_m = 19472$; $\frac{p_1}{p_2} = 1{,}059$; $lg \frac{p_1}{p_2} = 0{,}025$; $h_2 - h_1 = 487$ m, $h_2 = 999$ m.

Die Näherungsformel ergibt $h_2 - h_1 \approx 8454 \cdot \frac{53{,}4}{926{,}7} = 487$ m.

Man prüfe die folgende Tabelle:

t_m	9^0	12^0	$20{,}5^0$	14^0	10^0	5^0	22^0	0^0	0^0	
p_1	844,7	902	1016	928	820	1000	1012	1000	1000	*mb*
p_2	713,1	881	829	802	791	211*)	954	999	998 685**)	*mb*
$h_1 - h_2$	1398	196,5	1748	1226	298	12660	501	8,02	10,52	*m*

*) Messung im Flugzeug. **) 1 Torr = 1 mm Hg = 1,315 *mb*.

Läßt man die Temperaturkorrektion außer acht ($t_m = 0$), so ist $h_2 - h_1 \approx 18400\ lg \frac{p_1}{p_2} \approx 7990 \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_m}$. Setzt man ferner $h_1 = 0$, $p_1 = 1000\ mb$ an, so gilt die Zusammenstellung

p_2	900	800	700	600	500	400	300	200 mb
h_2	842	1782	2850	4080	5540	7320	9620	12860 m

Bei großen Höhendifferenzen rechnet man besser nach der exakten, bei kleinen nach der Näherungsformel. Die Ergebnisse sind in Fig. 32 niedergelegt, aus ihr kann man auch die ungefähren Meereshöhen ablesen, in denen bei dem vorhergehenden Zahlenbeispiel p_1 gemessen wurde.

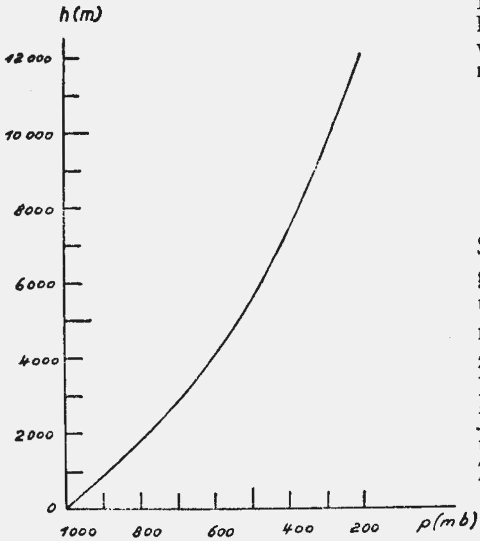


Fig. 32

27. Die Skala L als Maßstab

Die gleichmäßige Teilung der Skala L erlaubt es, die Abmessungen der andern Skalen zu finden und ihr Konstruktionsgesetz kennen zu lernen. Als Einheit benutzen wir die Länge dieser Skala. Da sie 25 cm beträgt, müssen wir jede Angabe mit 25 multiplizieren, um die betreffende Strecke in Zentimetern auszudrücken.

Auf einer ungleichmäßig fortschreitenden Teilung fassen wir den mit „x" bezeichneten Teilstrich ins Auge. Sein Abstand vom Anfangsstrich sei X. Um ihn zu finden, bringen wir den Anfangsstrich mit dem der Teilung L zur Deckung, stellen den Läuferstrich auf „x" ein und lesen X auf L ab.

Das Bildungsgesetz der Skalen O_1, U_1, U_2 lautet $X = lg\ x$. Wir prüfen es an einzelnen Beispielen. Es sei etwa $x = 6$. Einer Tafel entnehmen wir $lg\ x = 0{,}7782$. Bei der eben beschriebenen Einstellung finden wir auf L, wie schon früher gesagt, den Wert 0,778. Sein Abstand vom Nullpunkt der Teilung L ist $0{,}778 \cdot 25 = 19{,}45$ cm. Ebenso weit ist „6" (O_1, U_1, U_2) vom Anfangspunkt „1" dieser Teilungen entfernt. Geben wir x alle möglichen Werte zwischen 1 und 10, so können wir also auf einem 25 cm langen Papierstreifen ein Modell dieser drei Skalen herstellen. Daß durch Aneinanderlegung von U_2 an „a" (U_1) und Aufsuchen von „b" auf U_2 das Produkt $a \cdot b$ auf U_1 gefunden wird, geht jetzt einfach aus der bekannten Beziehung $lg\ a + lg\ b = lg\ (ab)$ hervor, ebenso leicht findet man die Rechtfertigung unserer Divisionsregel (S. 9) durch die Formel $lg\ a - lg\ b = lg \left(\frac{a}{b}\right)$.

Die Skala Q hat das Bildungsgesetz $Y = \frac{1}{2}\ lg\ y$ (Vgl. S. 18) Sucht man auf U_1 „x" auf und findet darunter auf Q „y", so ist $X = Y$; $lg\ x = \frac{1}{2}\ lg\ y$, $x = \sqrt{y}$ oder $y = x^2$. (Vgl. S. 18). K ist nach der Beziehung $Z = \frac{1}{3}\ lg\ z$ konstruiert. Unter „x" (U_1) finden wir also $z = x^3$, umgekehrt ist $x = \sqrt[3]{z}$ (S. 31). Für R gilt $U = 1 - \frac{1}{2}\ lg\ u$. Bedeckt der Läuferstrich „x" auf U_1, „y" auf Q, „z" auf K, „u" auf R, so ist $X = Y = Z = U$. Man hat also $1 - \frac{1}{2}\ lg\ u = lg\ x$; $\frac{1}{2}\ lg\ u = 1 - lg\ x = lg\left(\frac{10}{x}\right)$; $lg\ u = 2\ lg\left(\frac{10}{x}\right)$; $u = \left(\frac{100}{x^2}\right)$; $x = \left(\frac{10}{\sqrt{u}}\right)$; $1 - \frac{1}{2}\ lg\ u = \frac{1}{2}\ lg\ y$; $lg\ u + lg\ y = 2$; $u\,y = 100$; $u = \frac{100}{y}$, $y = \frac{100}{u}$; $1 - \frac{1}{2}\ lg\ u = \frac{1}{3}\ lg\ z$; $\frac{1}{2}\ lg\ u = 1 - \frac{1}{3}\ lg\ z = \frac{1}{3}\ lg\ 1000 - \frac{1}{3}\ lg\ z = \frac{1}{3}\ lg\left(\frac{1000}{z}\right)$, $lg\ u = \frac{2}{3}\ lg\ \frac{1000}{z}$; $u = \left(\frac{1000}{z}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{100}{z^{\frac{2}{3}}}$ und umgekehrt $z = \frac{1000}{u^{\frac{3}{2}}}$.

Die Skala S folgt dem Gesetz $S = lg\ (10\ sin\ \alpha) = 1 + lg\ sin\ \alpha$. Ist z. B. $\alpha = 45° = 50^g$, so ist $lg\ sin\ \alpha = 9{,}8495 - 10$; $S = 0{,}8495$. Die Strecke vom Anfangsstrich der S-Skala ($\alpha = 5°44' = 6^g38^c$) bis zu $\alpha = 45° = 50^g$ mißt also $0{,}8495 \cdot 25 = 21{,}24$ cm, wie man leicht nachprüft. Bei T gilt die Formel $T = lg\ (10\ tg\ \alpha) = 1 + lg\ tg\ \alpha$. Für $\alpha = 36° = 40^g$ ist $lg\ tg\ \alpha = 9{,}8613$, also $T = 0{,}8613$, entsprechend 21,53 cm. Bei S & T hat man $S \approx T \approx 2 + lg\ sin\ \alpha \approx 2 + lg\ tg\ \alpha$. Z. B. ist für $\alpha = 1°48' = 2^g$ $lg\ sin\ \alpha = 8{,}4971$, $lg\ tg\ \alpha = 8{,}4973$. Diese Werte können innerhalb der Genauigkeit des Rechenschiebers als gleich angesehen werden. $S = T = 0{,}4972$ entsprechend 12,43 cm. Endlich gilt für die sin-cos-Skala die Beziehung $V = lg\ (sin\ \alpha\ cos\ \alpha) + 1$, für die cos^2-Teilung ist $W = lg\ (cos^2\ \alpha) + 1$.

In allen Fällen stehen die Meßzahlen Y, Z, U, S, T, V, W auf der L-Skala, die Funktionswerte auf O_1 und U_1.

Da außer L alle Skalen die Logarithmen ihrer Funktionswerte enthalten, so kann mit ihnen ebenso gerechnet werden, wie mit U_1 und U_2. Die Multiplikation wird durch Aneinanderfügen der entsprechenden Skalenteile (Addition) ersetzt, die Division durch Abtragen (Subtraktion). Das Durchschlagen der Zunge bewirkt nur eine Vermehrung oder Verminderung des Logarithmus um 1, die Ziffernfolge wird dadurch nicht betroffen.

Schlußwort

Es ist selbstverständlich, daß in unseren Ausführungen nur ein kleiner Teil der in der Geodäsie auftretenden Aufgaben behandelt werden konnte. Wir hoffen aber, daß der Leser, der die Verwendung des Rechenschiebers an ihnen kennen und hoffentlich schätzen gelernt hat, ihn auch bei allen andern Problemen der Feldmessung gern zur Hand nehmen wird.

Weitere NESTLER-Rechenschieber

Nr.	Bezeichnung:	Vorzugsweise geeignet für:	Tlgslänge cm
11 D	System **Darmstadt**	Ingenieure, Mathematiker	12,5
11 B	**Stahlbeton**	Bauingenieure, Architekten	12,5
11 E	**Elektro**	Elektroingenieure	12,5
11 H	**Holzhändler**	Holzkäufer, Forstbeamte	12,5
11 K	**Kaufmann**	Kaufleute, Bankbeamte	12,5
11 R	System **Rietz**	Ingenieure, alle Berufe	12,5
11 M	mit S.- u. T.-Teilung	Ingenieure, alle Berufe	12,5
11 O	ohne S.- u. T.-Teilung	Ingenieure, alle Berufe	12,5
7/52	**Kaufmann** aus „Anagit"	Schüler	25
9	Original **Rietz** mit Reziprokteilung	Schüler	25
14/52	Ingenieur	Schüler	25
21*	System **Darmstadt**	Ingenieure, Mathematiker	25
22	Original **Rietz** mit Reziprokteilung	Ingenieure	15
23/3	Original „ ohne Reziprokteilung	und alle Berufe	25
23 R/3*	Original „ mit Reziprokteilung		25
23/52	Original **Rietz** aus „Anagit"		25
23 a R/3	Original „ mit Reziprokteilung		36
24 R	Original „ mit Reziprokteilung		50
24 R/100	Original „ mit Reziprokteilung		100
26	**Betriebsrechenschieber** Gewichtsrechenschieber	Ingenieure, Werkmeister, Kalkulatoren, Magazinverwalter	25
27	**Präzision** : Sonderausführung mit auf	Ingenieure	25
27 a	2 Abschnitte aufgetragenen Teilungen	und alle Berufe	50
33	**Chemiker**	Chemiker	25
37	**Elektro**	Elektroingenieure	25
37 a		Elektrotechniker	50
40	**Kaufmann**	Kaufmännische Berufe	25
40 a		Bankbeamte	50
40 n			25
43	**„Hoffmann"** für versch. Spannungen	Bauingenieure, für Stahlbetonbau	25
43 a	**„Dr. Schäfer"**		25

*) mit 360⁰ oder 400⁰ Teilung lieferbar

ETUIS aus Nußbaumholz, mit Samtfütterung, für Rechenschieber 25 cm und 50 cm lang.