NESTLER

Mode d'emploi

pour

les Règles à Calculs NESTLER

«RIETZ» et «DARMSTADT» (avec e^x = log log)

ÉDITION: ALBERT NESTLER AKTIENGESELLSCHAFT
LAHR/SCHWARZWALD, ALLEMAGNE

AF 112/9 – A

A. Initiation pratique à l'usage de la règle à calculs

(Systèmes Mannheim, Rietz et Darmstadt)

I. Le calcul à la règle, méthode graphique

En calculant avec la règle à calculs, nous n'opérons pas précisément avec des nombres, mais avec des longueurs d'échelles. Prenons deux règles graduées en centimètres et disposons les côte à côte afin que le commencement de l'échelle de la première coïncide avec la division 3 de la seconde. Si nous considérons sur la première règle les longueurs correspondant aux divisions 2, 5 et 9, nous relevons, en face, sur la deuxième, les longueurs ayant comme valeurs respectives 5, 8 et 12 cm. Nous avons établi une table d'addition du nombre 3 car

$$3 + 2 = 5 \qquad 3 + 5 = 8 \qquad 3 + 9 = 12$$

Un raisonnement analogue nous conduirait à la soustraction. Ainsi à la division 10 de la seconde règle correspond la graduation 7 de la première. $10 - 7 = 3$.

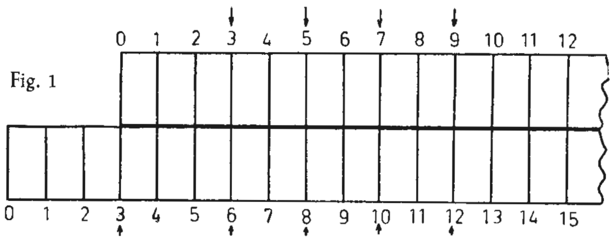


Fig. 1

Ces mêmes opérations sont effectuées sur la règle à calculs grâce à la réglette coulissante faisant fonction de deuxième règle. Toutefois par l'emploi des échelles dites «logarithmiques» les additions des longueurs se traduisent en réalité par leur produit et la soustraction par leur division.

II. Description de l'instrument

La règle à calculs comporte:

1° Le corps de la règle portant différentes échelles fixes.

2° La réglette coulissante. Ses échelles sont mobiles par rapport à celles de la règle.

3° Un curseur dont la plaque de verre porte un ou plusieurs traits fins parallèles. Ces traits facilitent d'une part la lecture du résultat et assurent d'autre part certaines correspondances entre les différentes échelles.

Pour les calculs courants nous utilisons le trait du milieu et nous le désignons par L dans les explications qui vont suivre. Les autres sont utilisés pour des opérations de calcul plus particulières.

III. Echelles de la règle à calculs technique

Règle et réglette comportent:

1° L'échelle A, sur la règle en face de la graduation supérieure de la réglette. C'est une graduation logarithmique dédoublée dont les deux parties vont respectivement de 1 à 10 et de 10 à 100.

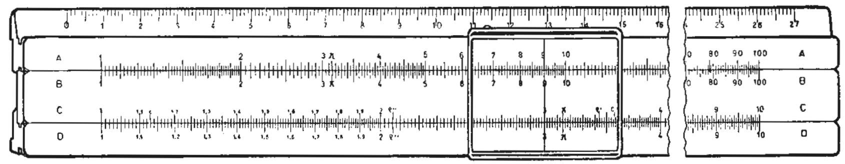


Fig. 2

2° L'échelle B, échelle supérieure de la réglette, identique à l'échelle A. Les valeurs relevées sur les échelles A et B représentent les carrés des valeurs des échelles C et D citées ci-dessous.

3° L'échelle C sur la partie inférieure de la réglette graduée de 1 à 10.

4° L'échelle D identique à C, située sur la partie inférieure de la règle et en face de l'échelle C de la réglette.

5° Un biseau gradué en mm à la partie supérieure de la règle. A la partie inférieure de la règle une échelle en pouces (inches).

6° Au dos de la règle, nous trouvons diverses constantes physiques.

IV. Lecture des nombres sur les échelles

La première habitude à prendre consiste à déterminer n'importe quel nombre sur les différentes échelles.

Considérons l'échelle D. Nous constatons que les divisions sont de plus en plus serrées au fur et à mesure que nous nous déplaçons vers la droite, de sorte que les subdivisions ne sont pas les mêmes au début et à la fin. En effet si nous voulions garder les mêmes subdivisions partout, les graduations seraient beaucoup trop rapprochées et de ce fait illisibles à la fin de l'échelle.

L'espace entre «1» et «2» est divisé tout d'abord en 10 divisions correspondant à 1,1; 1,2; 1,3 .... 1,9. Chacune de ces divisions est subdivisée en 10 parties. Nous lisons ainsi: 1,00; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04 .... 1,09; 1,10; 1,11; 1,12 etc. Les espaces entre «2» et «3», «3» et «4» comportent également 10 divisions, chacune étant subdivisée en 5 parties.

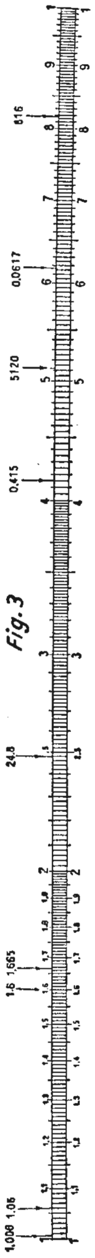


Fig. 3

Nous lisons 2,00; 2,02; 2,04 .... 2,08; 2,10; 2,12 etc. Enfin les espaces «4» — «5», «5» — «6» .... «9» — «10» sont toujours en 10 parties, cependant chacune ne se subdivise qu'en 2.

La règle à calculs ne précise pas la position de la virgule. — La division «1» peut aussi bien être 1; 10; 100; 1000; 0,1; 0,01 etc.; «2» signifie aussi bien 20; 200; 2000; 0,2; 0,002 etc. Afin d'éviter des erreurs de zéro, il est recommandé de faire les exercices de lecture en énonçant les chiffres successifs; par exemple à gauche sur l'échelle D, en lit un — zéro — zéro au lieu de 100, un — zéro — un au lieu de 101, un — zéro — deux au lieu de 102 etc. Les 5 dernières divisions avant «2» se lisent: un — neuf —cinq au lieu de 195, un — neuf — six au lieu de 196, un — neuf —sept au lieu de 197, un — neuf — huit au lieu de 198, un — neuf — neuf au lieu de 199.

Entre «2» et «4» nous lisons deux — zéro — zéro au lieu de 200, deux — zéro — deux au lieu de 202, deux — zéro — quatre au lieu de 204, deux — zéro — six au lieu de 206, deux — zéro — huit au lieu de 208, deux — un — zéro au lieu de 210 etc.

Entre «4» et «10» nous lisons quatre — zéro — zéro au lieu de 400, quatre — zéro — cinq au lieu de 405, quatre — un — zéro au lieu de 410, quatre — un — cinq au lieu de 415 etc.

Afin de faciliter la lecture il est indiqué de se servir du curseur en amenant le trait L exactement sur la graduation à lire.

Les mêmes exercices de lecture sont effectués sur l'échelle A, dont les subdivisions sont différentes de celles de l'échelle D. En effet l'espace entre «1» et «2» comporte au total 50 divisions, entre «2» et «5» 20 divivions et entre «5» et «10» 10 divisions. L'échelle «1» — «10» est absolument identique à l'échelle «10» — «100».

Dans la plupart des cas, les résultats à obtenir se situent entre 2 graduations. Nous sommes alors amenés à lire les valeurs intermédiaires entre deux traits. La lecture est faite par estimation et toujours à l'aide du curseur.

Elle est encore facile, lorsque le trait du curseur se situe entre deux divisions et exactement en leur milieu. Considérons par exemple L au milieu de la deuxième (1,01) et de la troisième division (1,02) de l'échelle B. Nous lisons un — zéro — un — cinq, c'est à dire 1015; au milieu entre 4,00 et 4,05, nous lisons quatre — zéro — deux — cinq: 4025.

Avec un peu d'entrainement, nous évaluons dans le premier tiers de la longueur «1» — «2» de l'échelle D les dixièmes d'une division, ce qui permet de lire 1001, 1002 .... 1299. Entre «1,3» et «2» nous nous contentons de lire les cinquièmes des divisions: donc 1302, 1304, 1306 .... 1996, 1998 et 2000. Entre «2» et «2,5» il est encore possible d'évaluer les dixièmes c'est à dire 2002, 2004, 2006 ... 2498. Entre «2,5» et «4» nous évaluons les quarts et lisons 2505, 2510, 2515 .... 2985, 2990 .... 3985, 3990. Enfin à partir de la division «4», la lecture des cinquièmes entre 2 graduations est possible et avec un peu plus d'habitude nous lisons 401, 402 .... 998 et 999.

Afin d'acquérir cette précision de lecture, de nombreux exercises s'imposent.
L'exposé ci-dessus s'applique aux règles de 25 cm. Les échelles des règles de poche de 12,5 cm de longueur, comportent moins de subdivisions, alors que les règles de 50 cm en comportent plus. Ces dernières ont donc l'avantage d'une lecture à la fois plus aisée et plus précise. Nous lisons sur l'échelle D: 1001, 1002 .... 4999 puis 5002, 5004 jusqu'à 9998. Malgré leur grande longueur, ces règles sont maniables, peu gênantes dans l'emploi au bureau. Toutefois, dans la plupart des cas, la règle courante de 25 cm donne entière satisfaction.

L'échelle D de la règle de poche comporte les divisions 100, 102, 198 ainsi que 205, 210, 215, 290, 295 .... 980, 990 et 1000. La lecture des résultats est donc moins précise, mais donne, dans la plupart des cas, une approximation suffisante surtout pour les calculs estimatifs. Grâce à leur faible encombrement, on les porte facilement sur soi et on s'en sert aussi bien au magasin, qu'à l'atelier, au chantier ainsi qu'en voyage.

V. Précision de lecture

Le repérage exact sur les échelles, les lectures précises des résultats nécéssitent une bonne vue et une pratique d'emploi acquise seulement après de nombreux exercices.
Pour un écart de lecture de 0,1 mm on démontre que l'erreur moyenne commise est

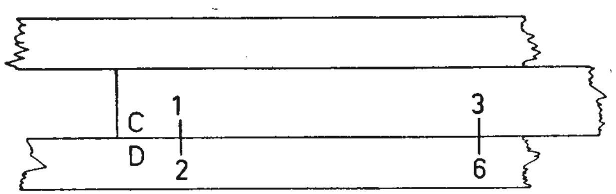
$$e = \frac{0{,}023}{l} \text{ ou } \frac{2{,}3}{l}\,\%.$$

l étant la longueur de l'échelle en cm. Pour la règle de poche de 12,5 cm, l'erreur est environ de 0,2 %; pour la règle de 25 cm: 0,1 % et pour la règle de 50 cm: 0,05 %. Lorsqu'une opération nécessite 2, 3 ou 4 lectures successives, l'erreur moyenne du résultat final ne sera pas 2, 3 ou 4 fois plus importante, mais seulement
$e\sqrt{2}$, $e\sqrt{3}$ et $e\sqrt{4}$ c'est à dire 1,4 e, 1,7 e et 2 e.
Il est pratiquement sans importance que la longueur d'une barre de fer soit de 100 cm ou de 99,9 cm mais lorsque cette différence constitue le résultat à obtenir comme par exemple dans un calcul de dilatation, il est toujours possible de poser le problème de façon à opérer sur l'allongement seul et non sur la longueur totale. Les problèmes de mathématique peuvent donc au besoin être transposés en vue d'un calcul à la règle.

VI. Multiplication $(a \cdot b = c)$

On emploie de préference les échelles logarithmiques simples C et D. On pourrait utiliser les échelles A et B mais la précision serait deux fois moins grande. Ainsi que nous l'avons indiqué au chapitre 1, la multiplication s'obtient en additionnant des longueurs d'échelles.
Règle: Amener 1 de l'échelle C en face du premier facteur «*a*» (multiplicande) lu sur l'échelle D. Placer le trait L du curseur sur le deuxième facteur «*b*» (multiplicateur) pris sur l'échelle C de la réglette et lire en regard, sur l'échelle D, le produit «*c*».
Exemple: $2 \cdot 3 = 6$.
Placer 1 de C sur 2 de D, amener L sur 3 de C et lire, en face, sur D, le produit 6.

Fig. 4



Outre le produit, nous avons constitué la table de multiplication de 2. En effet, en face des seconds facteurs,

pris sur l'échelle C:	1,3	1,5	175	225	36	49
nous lisons sur D:	2,6	3	350	450	72	98

Il peut arriver que la graduation correspondant au deuxième facteur pris sur l'échelle C se trouve au delà de l'extrémité droite de la règle. Il suffit, dans ce cas, au lieu d'opérer avec le 1 de la réglette, de prendre le 10 à l'extrémité droite en tirant la réglette vers la gauche. Ainsi pour trouver le produit de $8 \cdot 6$ on place le 10 de l'échelle C en face du 8 de l'échelle D et on lit le résultat en face de 6 «C», sur «D».

Mais la meilleure position de calcul de la réglette est toujours celle où sa plus grande partie est engagée dans le corps de la règle.

Ces mêmes opérations effectuées à l'aide des échelles doubles A et B ne nécessitent en aucun cas le tirage de la réglette vers la gauche.

VII. Division $\left(\frac{a}{b} = c\right)$

On emploie, comme pour la multiplication, les échelles inférieures C et D. Ainsi que nous l'avons indiqué au chapitre I, la division s'obtient en soustrayant des longueurs d'échelles.

Règle: On fait coïncider le dividende «*a*» pris sur l'échelle D avec le diviseur «*b*» de l'échelle C et on lit le résultat «*c*» sur l'échelle D en face du 1 de la réglette.

Exemple: $6 : 3 = 2$.
Placer 3 de C sur 6 de D et lire 2 sur l'échelle D en regard du 1 de la réglette. Cette position de la réglette constitue en outre une table de division du quotient 2. Ainsi nous lisons sur C

les diviseurs:	2	4	2,6	1,57	correspondant
aux dividendes:	4	8	5,2	3,14	lus sur D.

On peut aussi bien employer les échelles A et B en prenant le dividende sur A, le diviseur sur B et lire le quotient sur A.

VIII. Multiplications et divisions combinées — Proportions

Dans la pratique, nous rencontrons souvent des problèmes consistant à rechercher la valeur de *x* qui, avec une grandeur *c*, constitue un rapport égal à un rapport donné, x étant la quatrième proportionelle. Pour le calcul, nous appliquons la «règle de trois». Afin d'obtenir une table étendue de résultats, nous utilisons les échelles A et B.

Exemple: Quel est le prix de 2,20 kg d'un matériau, sachant que 3,5 kg coûtent 78,— frs.
Nous mettons en coïncidence 78.— de A avec 3,5 de B. Sans nous arrêter à ce résultat intermédiaire, qui nous donnerait le prix unitaire, nous lisons le résultat à obtenir sur l'échelle A en regard de 2,2 B de la réglette, soit frs: 49.—.

Sans aucune manipulation de la réglette, nous avons donc la possibilité de lire successivement les prix de tous les autres poids pouvant être considérés. Nous les trouvons sur l'échelle A en regard des différents poids pris sur B.

Ainsi:

Poids (sur échelle B)	1	2	2,5	7	0,88
Prix (sur échelle A)	22,28	44,50	55,70	156.—	19.60

Il est possible d'intervertir les échelles en prenant les poids sur A et les prix sur B. Le même principe de calcul est adopté chaque fois que nous majorons ou diminuons un nombre ou toute une série de nombres d'un certain pourcentage.

Exemple: Cas de majoration de 15%.

Faire coïncider 1 de B avec 1,15 de A et, en face des valeurs considérées prises sur l'échelle B, lire sur A les valeurs majorées.

Ainsi pour les valeurs prises sur B:	1	2	43,5	6	8
nous lisons sur A	1,15	2,3	50	6,9	9,20

Autre exemple: Calcul des changes.

En amenant le 1 de l'échelle C en face du cours de la devise étrangère pris sur l'échelle D, nous établissons une table de correspondance entre les devises considérées.

sur C (D.M.):	1	2	7	25
sur D (FF):	118	236	826	2950

IX. Extraction de racines carrées
Elévation au carré

Nous avons vu au chapitre III que les échelles supérieures A ou B sont obtenues par dédoublement des échelles inférieures C et D. Le carré d'un nombre lu sur l'échelle D se lit directement en regard sur l'échelle supérieure A et inversement la racine carrée d'un nombre lu sur l'échelle supérieure A se lit directement en regard sur l'échelle inférieure D.

Remarque. — Dans l'extraction d'une racine carrée une difficulté se présente. Faut-il lire le nombre dont on cherche la racine sur l'échelle de gauche (1 à 10) ou sur l'échelle de droite (10 à 100)? Si le nombre est situé entre 1 et 10, on utilise le côté gauche, si par contre il est supérieur à 10 et inférieur à 100 on utilise le côté droit de l'échelle A.

En général, si le nombre de chiffres de la partie entière est pair, on utilise l'échelle de droite, s'il est impair l'échelle de gauche.

Pour les valeurs plus petites que 1 et comportant un nombre pair de zéros après la virgule, on prend l'échelle de droite et pour un nombre de zéros impair l'échelle de gauche.

Exemple:

Nombre (échelle A):	0,03|	0,00|30|	4	40	9	90
Racines carrées (échelle D):	0,1732	0,0548	2	6,32	3	9,49

X. Surface du cercle — Poids des fers ronds

$$\text{Surface du cercle} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Grâce au curseur à trois traits, la recherche de la surface d'un cercle est très rapide, sans qu'il soit nécessaire de manipuler la réglette. On place le trait de droite sur le diamètre lu sur l'échelle D; la surface est obtenue sur l'échelle A en regard du trait du milieu.

Pour la même position du curseur à 3 traits équidistants, on lit sur l'échelle A, à l'emplacement du trait de gauche et pour le même diamètre, le poids d'une barre de fer de section circulaire, de densité 7,85 et de longueur 1. Sa multiplication par une longueur déterminée (à l'aide de l'échelle B) constitue le poids de la barre de fer de cette longueur.

Le curseur à trois traits asymétriques est utilisé pour la conversion de chevaux-vapeur en kilowatts ou inversement.
Une autre détermination rapide de la surface du cercle est obtenue à l'aide des marques C et C_1 placées sur l'échelle inférieure de la réglette.
Les distances «1» — C et 10 — C_1, L étant placé en coïncidence avec «10» de l'échelle A, sont égales et correspondent à celles comprises entre le trait du milieu du curseur et les deux traits latéraux.
Nous opérons de la façon suivante:
Les repères C ou C_1 de la réglette sont mis en regard du diamètre d pris sur l'échelle D. Nous lisons les surfaces sur l'échelle A en face de «1» ou «10» de la réglette.

B. La Règle à calculs « Rietz »

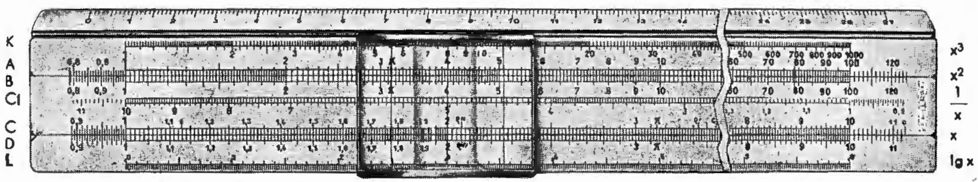


Fig. 5

La règle à calculs «Rietz» comporte en plus des échelles A, B, C et D, décrites au chapitre précédent, les échelles ci-après:
1° L'échelle des **cubes** «K» tracée sur le bord supérieur de la règle et graduée en trois parties égales allant successivement de 1 à 10, 10 à 100, 100 à 1000.
2° L'échelle des **inverses** «CI» gravée en rouge entre les échelles B et C. C'est l'échelle des réciproques, identique à l'échelle D mais graduée en sens inverse.
3° Léchelle des **mantisses** «L» sur le bord inférieur du recto de la règle. Elle est graduée en divisions égales de 0 à 1. Les subdivisions donnent les intervalles suivants:

0,001 sur la règle de 50 cm, 0,002 sur la règle de 25 cm et 0,005 sur la règle de poche de 12,5 cm.
4° Les échelles S, T, S & T, au verso de la réglette pour la détermination des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes.

I. L'échelle des cubes «K»

Elle comporte trois parties égales, sa longueur totale étant égale à celle de l'échelle D, ses divisions représentent les cubes des nombres pris sur D, le repérage se faisant toujours à l'aide du curseur et sans aucune manipulation de la réglette.
Ainsi nous lisons:

n sur l'échelle D:	15	2	3	4	7	9
n^3 sur l'échelle K:	3375	8	27	64	343	729

etc . . .

Les divisions de «K» étant très serrées, la précision de lecture est diminuée. Afin de l'augmenter, on emploie la méthode qui consiste à calculer $a^3 = a^2 . a$.

Inversement, en considérant un nombre sur l'échelle «K» nous lisons sa racine cubique sur «D».

Mais, comme pour l'extraction de la racine carrée, il s'agit de faire le choix de l'échelle à employer. Lorsque le nombre dont on extrait la racine cubique est supérieur à 1000, on le fractionne en groupes de 3 chiffres à partir de la droite. Lorsque la tranche de gauche comporte un seul chiffre, utiliser l'échelle de gauche, si elle comporte deux chiffres, utiliser l'échelle du milieu et si elle comporte 3 chiffres utiliser l'échelle de droite.

Lorsque le nombre est inférieur à 1, on fractionne en tranches de trois vers la droite à partir de la virgule. On considère alors le groupe le plus à gauche qui contient le premier chiffre significatif et on applique la même règle que ci-dessus.
Ainsi:

n	3'200	32'000	320'000	0,'400	0,'040	0,'004
$\sqrt[3]{n}$	14,74	31,75	68,4	0,737	0,342	0,1587

II. L'échelle des inverses «CI»

Cette échelle étant inversée, il y a lieu d'en tenir compte lors de la lecture de ses divisions qui vont de la droite vers la gauche.

1° Division $\frac{a}{b}$

Répérer le dividende a sur l'échelle D et mettre en coïncidence 1 ou 10 de «CI». Lire le quotient sur D en regard du diviseur b pris sur «CI». En effet nous soustrayons la longueur b prise sur «CI» de la longueur «a» prise sur D, opération qui corespond en réalité à une division.

On peut ainsi effectuer une série de divisions ayant même dividende en déplaçant uniquement le curseur. $\left(\frac{a}{b_1}, \frac{a}{b_2}, \frac{a}{b_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right.$

Division $\frac{a}{b \cdot c}$

Deux divisions successives d'un seul coup de réglette sont effectuées comme suit:

Mettre en coïncidence «a» de D avec le premier diviseur b de l'échelle C, lire le résultat final sur D en regard du deuxième diviseur c pris sur «CI».

2° Multiplication de plusieurs nombres.

$a \cdot b = a : \frac{1}{b}$ On met en coïncidence «a» de l'échelle D avec b de l'échelle CI. On lit le produit sur D en face de 1 ou 10 de l'échelle CI. Sans nouveau déplacement de la réglette, il est possible de multiplier par un troisième facteur c en considérant ce nombre sur l'échelle C et le produit total en regard sur D.

Une multiplication de trois facteurs égaux $(a \cdot a \cdot a)$ donne a^3 avec une précision de lecture bien plus grande que celle de l'échelle des cubes.

De nombreux exercices s'imposent en vue d'acquérir la sûreté de calcul indispensable et l'habitude de l'échelle des inverses.

Elévation au carré et au cube de l'inverse $\frac{1}{a}$ de a.

Calcul de $\frac{1}{a^2}$

Répérer a sur l'échelle des inverses, à l'aide de L; lire en face sur l'échelle A le résultat $\frac{1}{a^2}$

Pour calculer $\frac{c}{a^2}$ placer 1 de l'échelle supérieure de la réglette en regard de c pris sur l'échelle A. Mettre L sur a de l'échelle CI et lire le résultat $\frac{c}{a^2}$ en face sur A.

Nous procédons de la même façon pour le calcul $\frac{1}{a^3}$ en utilisant toutefois l'échelle des cubes à la place de l'échelle A.

Nous calculons aussi facilement les valeurs de $\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \frac{c}{\sqrt[3]{a}}$.

III. L'échelle des mantisses «L»

En considérant un nombre sur D, la mantisse de son logarithme est lue en regard sur l'échelle L. La caractéristique est égale au nombre de chiffres moins 1, du nombre dont on cherche le logarithme, si ce nombre est plus grand que 1. Si le nombre est plus petit que l'unité, la caractéristique est négative et égale au nombre de zéros successifs plus 1, qu'il y a de zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif. Nous obtenons ainsi les logarithmes vulgaires dont la base est 10. On les multiplie par 2,303 pour les convertir en logarithmes népériens dont la base est 2,718. L A = 2,303 log A.

L'échelle des mantisses donne le résultat avec trois chiffres exacts. De ce fait elle fait fonction de table de logarithmes à trois décimales.

Recherche de quelques valeurs:

a:	3,65	41,8	1389	0,2	0,02	0,002
log a:	0,562	1,621	3,143	9,301—10	8,301—10	7,301—10
La:	1,295	3,73	7,24	—1,609	—3,91	—6,21

Autres exemples d'application de l'échelle des mantisses:
Calcul de e^x et de e^{-x} pour les valeurs de x: 2,2, 1,242 et 0,085.
Ecrivons log $e^x = x$ log $e = 0{,}434\ x$.

Les résultats obtenus sont respectivement 0,955, 0,539 et 0,0369. Considérant ces nombres décimaux sur l'échelle des mantisses nous lisons e^x en regard sur l'échelle D, en tenant compte des caractéristiques, nous relevons en même temps sur l'échelle des inverses $\frac{1}{e^x}$ c'est à dire e^{-x}.

Ainsi nous avons:

x	2,2	1,242	0,085
e^x	9,025	3,46	1,089
e^{-x}	0,1108	0,289	0,918

Voir les autres applications de l'échelle des mantisses au chapitre traitant de la règle Darmstadt.

IV. Les Echelles Trigonométriques

Explication des marques ϱ', ϱ'' et $\varrho_{,,}$.

Les graduations S et T au dos de la réglette se rapportent aux échelles C et D. Pour les angles de faible valeur, les sinus sont assimilés aux tangentes; l'échelle commune S & T située au milieu de la réglette s'étend de 0° 34' à 5° 44'. Les angles considérés sont mis en regard du repère inférieur de l'encoche de droite de la règle, les sinus et tangentes sont lus sur l'échelle C en face de «10» de D.

Pour la recherche des sinus des angles compris entre 5° 44' et 90° nous amenons l'angle pris sur l'échelle S en regard du repère supérieur de l'encoche de droite. Les angles pris sur l'échelle des tangentes T sont amenés en regard du repère inférieur de l'encoche de gauche. Les résultats sont lus sur l'échelle C en regard de «1» ou «10» de l'échelle D.

Remarque: Les valeurs des sinus et tangentes compris entre 0° 34' et 5° 44' commencent par 0,0 . . . , celles des sinus des angles compris entre 5° 44' et 90° et des tangentes des angles compris entre 5° 44' et 45°, par 0, . . .

Ainsi nous avons:

Angles:	1° 30'	5°
Sinus ou tangentes:	0,0262	0,0872

Angles:	7°	30°	50°
Sinus:	0,1219	0,5	0,766

Angles:	7°	11°	30°
Tangentes:	0,1228	0,194	0,577

Comme le cosinus d'un angle est égal au sinus de son complément, cos α = sin $(90° - \alpha)$, nous le déterminons à l'aide des échelles S et S & T, pour les angles compris entre 0° et 89° 26'.

Connaissant la tangente d'un angle, nous déterminons la cotangente en considérant la relation $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$; il suffit donc de prendre l'inverse de la tangente sur l'échelle CI.

Nous utilisons les relations tan α = cot (90° — α) et cot α = tan (90° — α) pour α plus grand que 45°.

Pour les angles inférieurs à 0° 34′ nous remplaçons le sinus et la tangente par des longueurs d'arc.

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{a'}{3438} = \frac{a'}{\varrho'} \text{ de même } \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{a''}{206265} = \frac{a''}{\varrho''}.$$

ϱ′ et ϱ″ sont gravés sur l'échelle C et D ce qui facilite le repérage. Nous avons aussi $\cot\alpha = \frac{\varrho'}{a'} = \frac{\varrho''}{a''}$.

La conversion des arcs exprimés en parties du rayon, en grades, s'obtient en multipliant la valeur de l'arc par le nombre 636 620″, repéré sur les échelles C et B par la marque $\varrho_{''}$.

$$\frac{\pi}{2} = 100 \text{ gr} = 10\,000' = 1\,000\,000''.$$

Un radian vaut donc 1 000 000 : $\frac{\pi}{2}$ = 636 620″.

Lorsque nous exécutons une suite d'opérations trigonométriques, il est commode d'opérer la réglette retournée, de manière que l'échelle S se trouve en regard de l'échelle supérieure A de la règle.

C. La règle a calculs système « Darmstadt »

I. DISPOSITION DES ECHELLES

Cette règle comporte les échelles normales K, A, B, CI, C et D dans la même disposition que sur la règle système «RIETZ» que nous venons de décrire.

Nous jugeons donc qu'il est inutile d'y revenir, mais en cas de besoin on se reportera aux pages précédentes.

L'échelle des mantisses L est gravée sur la partie supérieure biseautée de la règle. Les mantisses correspondant aux nombres choisis sur l'échelle D sont repérées à l'aide de l'index prolongeant L, gravé sur le bord rabattu supérieur du curseur. Nous opérons de la même façon que précédemment pour la détermination de la mantisse et pour l'opération inverse.

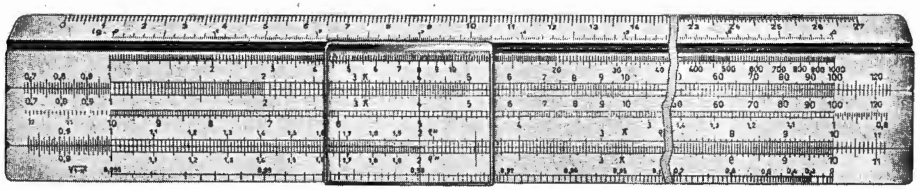


Fig. 6

Les échelles trigonométriques sin, tan, cos, et cot, sont fixes et placées sur le champ inférieur de la régle pour les types en bois/cellulo et sur le dessus de la régle pour les types en plastique.

D'autre part le bord inférieur du recto de la règle est muni d'une échelle inversée, l'échelle cosinus appelée encore échelle $\sqrt{1-x^2}$, allant de 0,995 à 0.

La disposition des échelles des lignes trigonométriques implique naturellement un autre mode de repérage et de calcul que sur les autres règles. Une excellente précision de lecture est obtenue surtout là, où la lecture sur la règle RIETZ s'avère difficile.

Au dos de la réglette on a tracé des échelles de puissances e^x, en trois sections, que nous dénommons de bas en haut P, P_1 et P_2.

II. LE CURSEUR

La plaque de verre porte trois traits, le cadre comporte à sa partie supérieure un index dirigé sur l'échelle des mantisses et la plaquette inférieure transparente est munie d'un repère nécessaire à la lecture des échelles trigonométriques. Pour la règle plastique les lignes trigonométriques disposées différemment sont lues à l'aide du trait médian du curseur que nous appelons toujours L.

L en combinaison avec le trait court de droite sert au calcul de la surface du cercle, du volume et du poids du cylindre, comme cela a été expliqué pour le curseur normal (page 9, chap. X).

Le trait court de droite L_r en combinaison avec le trait de gauche L_e est utilisé pour la conversion des CH en KW: les CH sont repérés par L_r, les KW sont lus en regard de L_e.

III. LES ECHELLES TRIGONOMETRIQUES

1° Changements d'Unités, Conversion des minutes, secondes, du systéme sexagésimal, en parties décimales et inversement.

Les sinus et les tangentes des angles repérés sur les échelles S et T, sont lus sur l'échelle D. Les subdivisions de ces échelles ne correspondent toutefois pas aux minutes, mais à des parties décimales. La conversion est simple. Admettons un angle de 6°,23, 23 étant la partie centésimale, on multiple par 0,6 pour obtenir l'angle en minutes. Inversement pour évaluer en parties décimales un angle donné en minutes, il suffit de diviser par 0,6. A cet effet nous plaçons «60» de B en regard de «100» de A. Les minutes lues sur B correspondent au nombre décimal se trouvant en regard sur A.

Pour les angles de faible valeur il faut souvent considérer les secondes; nous savons que 1° = 60′ = 3600″.

Nous plaçons «36» de B de coïncidence avec «100» de A et opérons de la même façon que ci-dessus.

Ainsi 1°,246 = 1° + 886″ = 1° 14′ 46″
0° 19′ 46″ = 1186″ = 0°,330
De même 19′ = 0°,317. 46″ = 0° 013 et 19′ 46″ = 0,330.

2° Calcul de Sinus

L'échelle S (chiffres rouges pour le sinus, noirs pour le cosinus) va de 5° à 90°.

Considérons un angle entre ces deux limites. Il est repéré sur l'échelle S à l'aide de L (règle plastique) ou à l'aide du trait prolongeant L situé sur la plaquette inférieure du curseur (règle bois-celluloïd). Le sinus est lu sur l'échelle D sous L.

Par exemple sin 30° = 0,5; sin 21°,4 = 0,365.

Le sinus de tous ces angles commence par 0,...

Pour les angles inférieurs à 5° nous aurons

$$\sin\alpha \approx \frac{\alpha^\circ}{57{,}2} = \frac{\alpha^\circ}{\varrho^\circ} = \frac{\alpha'}{3438} = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{206265} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

Les marques ϱ' et ϱ'' sont gravées sur les échelles C et D. La précision est accrue, si nous soustrayons du résultat obtenu ci-dessus, la valeur:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^\circ}{\varrho^\circ}\right)^3 \quad \text{égale à} \quad \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha'}{\varrho'}\right)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha''}{\varrho''}\right)^3$$

Ainsi $\sin 5^\circ \approx \frac{5}{57{,}3} = 0{,}0873$.

Nous retranchons le facteur de correction $\frac{1}{6}(0{,}0873)^3$ c'est à dire 0,0001 pour obtenir finalement sin 5° = 0,0872. On néglige cette correction en pratique.
Inversement étant donné le sinus d'un angle compris entre 0,1 et 1, nous le repérons sur l'échelle D et lisons l'angle sur l'échelle S.

Exemple: sin α = 0,302 α = 17°,58.

Pour les angles de faible valeur nous aurons:
$\alpha \approx 57^\circ{,}3 \cdot \sin\alpha$. Exemple: le sinus 0,04 correspond à l'angle 57°,3 · 0,04 = 2°,292.
Une précision supérieure exige la correction à l'aide du facteur $9^\circ{,}55 \cdot \sin^3\alpha$. Pour l'exemple ci-dessus le facteur de correction serait + 0°,0006.

3° Calcul du Cosinus

Tandis que sur la règle RIETZ l'évaluation de cosinus est subordonnée au calcul de l'angle complémentaire 90° − α et à la recherche de son sinus, arrangement aussi valable pour la règle DARMSTADT, cette dernière comporte une échelle $\sqrt{1-x^2}$, donnant la lecture directe de cette ligne.
Nous savons que le sinus de l'angle α repéré sur S est lu sur B; pour cette même position du curseur nous lisons sur l'échelle $\sqrt{1-x^2}$, la valeur $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ égale au cosinus de l'angle.

Ainsi sin 30° = 0,5, cos 30° = 0,866
sin 19°,75 = 0,338, cos 19°,75 = 0,941.

De même sin 70°,25 = 0,941, mais le repérage de cet angle est bien plus difficile, les divisions étant très serrées. Aussi l'opération inverse, consistant à déterminer cet angle connaissant son sinus ou son cosinus est très imprécise.
Nous déterminons sin α de deux manières:

D'abord comme indiqué au chapitre III (2), et ensuite d'après la relation sin α = cos (90° = α) comme indiqué au début de ce paragraphe. Mais, même cette relation n'est plus indispensable, lorsque nous calculons avec les chiffres rouges de l'échelle S. En effet, les angles repérés par ces chiffres ont leur sinus sur l'échelle

$\sqrt{1-x^2}$ et leur cosinus sur D.

Donc pour le cosinus aussi, deux possibilités de calcul nous sont offertes.

Nous remarquons que pour un angle donné, un procédé est d'autant plus précis, que l'autre s'avère plus insuffisant quant au repérage ou à la lecture.

Exemples: Sinus des angles relevés sur les divisions noires de l'échelle S:
sin 70° = 0,94 cos 70° = 0,342.

En considérant l'échelle inverse c'est à dire les chiffres rouges, nous lisons:
sin 70° = 0,939 et cos 70° = 0,3420.

De même, le premier procédé donne un angle ≈ 70° pour un sinus de 0,9412, et le deuxième permet la lecture de 70°,25 pour le même sinus.
Pour sin α = 0,265 nous repérons respectivement les angles 15°,36 et 15°,4.

Valeur du cosinus des angles inférieurs à 5°: $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^\circ}{57{,}3}\right)^2$

4° Calcul de tan α et cot α

Nous plaçons la réglette dans sa position de repos. Un angle compris entre 5° et 45° est repéré sur l'échelle T (chiffres noirs). Sa tangente est lue sur D, elle commence par 0,... En face sur l'échelle des inverses nous trouvons $\frac{1}{\tan\alpha}$ égal à cot α:
Ainsi tan 35° = 0,700 cot 35° = 1,428.
Si l'angle est supérieur à 45° nous utilisons la relation tan (90° − α) = cot α = $\frac{1}{\tan\alpha}$; nous le repérons toujours sur l'échelle T, mais en considérant cette fois les chiffres rouges. La tangente est lue sur CI et la cotangente sur D.
Ainsi tan 50° = 1,192 cot 50° = 0,839.

On se sert des mêmes échelles pour l'opération inverse, lorsqu'on veut déterminer l'angle α, sa tangente ou sa cotangente étant données.

La tangente des angles inférieurs à 5° est égale à $\sim \frac{\alpha^\circ}{57{,}3} = \sim \frac{\alpha'}{\varrho'} = \sim \frac{\alpha''}{\varrho''}$,

le facteur de correction étant: $+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha^\circ}{57{,}3}\right)^3$

tg 5° = 0,0872; le facteur de correction étant: $+\frac{1}{3}(0{,}0872)^3 = +0{,}0002$.

La tangente corrigée est 0,0874, sa cotangente 11,43 (lue sur CI). Inversement étant donné la tangente d'un angle inférieur à 5° nous déduisons l'angle par la relation α = 57°,3. tan α (voir sinus). Le coefficient de correction sera $-19^\circ{,}1 \tan^3\alpha$.

Pour α voisin de 90°, on pose α = 90° − β, β étant de faible valeur. Comme tan α = cot β et tan β = cot α, la détermination de la tangente et de la cotangente est facile. En effet:

tan 89°,65 = cot 0°,35 = 57,3 : 0,35 = 163,7
cot 89°,65 = tan 0°,35 = 0,35 : 57,3 = 0,00611.

Inversement si tan α = 200, sa cotangente sera $\frac{1}{200} = 0{,}005$.
90° − α = 0,005 · 57°,3 = 0°,2865; α = 89°,7135.

5° L'échelle cos. est aussi l'échelle «PYTHAGORE»

Les divisions sur D sont lues 0,1, 0,2, 0,3 ... et non 1, 2, 3 ... Nous plaçons L sur l'une d'elles, par exemple sur a. Sous L nous lisons sur l'échelle cos, $\sqrt{1-a^2}$. Par exemple en regard de 6 (lire 0,6) de D, nous lisons sur l'échelle cos. $\sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Inversement, en repérant 0,6 sur l'échelle cos. nous lisons 8 (0,8) sur D.

De même, 5 (0,5) repéré sur D correspond à $\sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$. Nous constatons que si a augmente, $\sqrt{1-a^2}$ diminue, ce qui n'a rien d'étonnant, les deux échelles étant inversées l'une par rapport à l'autre.

Application. Etant donné l'hypoténuse c et un coté a de l'angle droit d'un triangle rectangle, nous déduisons b à l'aide du théorème de Pythagore et nous avons

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2}$; Il est facile de calculer $\frac{a}{c}$; nous repérons son quotient sur l'échelle cos. et lisons en face sur D la valeur $\sqrt{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2}$.

Sans nous arrêter à ce résultat, nous multiplions par c pour trouver l'autre côté b de l'angle droit.

6° Triangle rectangle

Un problème fondamental consiste à calculer l'hypoténuse c et les angles, connaissant les côtés a et b de l'angle droit. On pourrait établir α en posant tan α $\frac{a}{b}$ et déterminer ensuite c à l'aide du théorème de Pythagore ou à l'aide de la relation $c = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Il est toutefois plus commode d'employer la méthode ci-contre:

Ecrivons les relations $\tan\alpha = \frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b}$; $\sin\alpha = \frac{a}{c} = a\cdot\frac{1}{c}$

Plaçons «1» ou «10» de l'échelle inférieure de la réglette sur a de l'échelle D, a étant le plus petit des côtés. Mettons L sur b pris sur l'échelle CI, nous lisons pour cette position sur l'échelle D, $a\cdot\frac{1}{b}$ ou $\frac{a}{b}$ valeur égale à tan α.

Sans déplacer L nous lisons α sur l'échelle T. $\beta = 90° - \alpha$. Repérons α sur l'échelle S à l'aide de L. Nous lisons sin α sur D et en face sur l'échelle C, $\frac{a}{\sin\alpha}$ et sur CI, $\frac{a}{\sin\alpha}$ égal à c.

7° La relation $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Dans le triangle nous avons la relation $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Repérons α sur l'échelle S; pour cette position de L nous lisons son sinus sur l'échelle D. Faisons coïncider la division a prise sur l'échelle inférieure de la réglette avec L. La disposition des échelles C et D correspond au rapport $\frac{\sin}{a}$

Si nous considérons les angles β et γ sur l'échelle S, pour cette même position de la réglette, nous lisons en face, sur l'échelle inférieure de la réglette les côtés b et c. Cette relation trouve aussi son application dans le triangle rectangle.

IV. LES ECHELLES DE PUISSANCES

1° Constitution des échelles

La règle Darmstadt est surtout caractérisée par les trois échelles P, P_1, P_2 (e^x), dites échelles des puissances, situées au dos de la réglette. Elles se rapportent à l'échelle D et permettent d'élever aux puissances, d'extraire les racines et de déterminer le logarithme d'un système de base quelconque.

Nous disposons de trois sections allant de 1,01 à 100 000 (10^5). Les valeurs relevées sur ces échelles sont réelles; en aucun cas on ne peut attribuer à la division 1,05 les grandeurs 10,5 — 105 — 1050, à la division 200 les valeurs 0,2 — 20 ou 20 000 etc. Ces divisions sont donc lues 1,05 et 200 et il en est ainsi pour toutes les autres.

L'échelle P commence par e égal à 2,718, parce que $Le = 1$ et log $(Le) = 0$. Un point quelconque «x» est situé à la distance $l\cdot\log$ (Lx) de la division initiale, l étant la longueur de l'échelle D (25 cm pour la règle moyenne), log, le logarithme de base 10 et L le logarithme de base e.

La possibilité d'utilisation de l'échelle P est toutefois limitée. En effet, à droite les divisions sont tellement serrées qu'aucune lecture précise n'est plus possible, à gauche, la dernière division est 2,5, y compris le prolongement.

Afin d'élargir la marge des possibilités de calcul, nous prolongeons P d'une unité logarithmique vers la gauche.

Une grandeur quelconque considérée sur cette nouvelle échelle, correspond à la racine dixième, ou, ce qui revient au même à la puissance 0,1 de la valeur correspondante repérée sur P. Cette échelle que nous nommons P_1, comporte les divisions allant de $\sqrt[10]{e}$ ou $e^{0,1}$ ou encore 1,105 à e, c'est à dire 2,718.

Nous procédons d'une façon analogue en prolongeant P_1 vers la gauche, la dernière division étant $\sqrt[100]{e} = e^{0,01} = 1{,}01005$. Cette échelle est dénommée P_2; ses divisions vont de 1,01005 à 1,105.

La longueur totale de l'échelle des puissances serait donc de 75 cm., trop longue évidemment pour se loger dans la régle de 25 cm. C'est pourquoi nous l'avons divisée en trois sections judicieusement superposées. La rétrogression d'une unité (racine dixième) s'obtient par le passage d'une grandeur «a» prise sur P à la division $a^{0,1}$ se trouvant en regard sur l'échelle P_1. Si nous montons encore d'une échelle, nous lisons sur P_2 $(a^{0,1})^{0,1}$ égal à $a^{0,01}$ égal à $\sqrt[100]{a}$. En considérant «a» sur l'échelle P_1 nous lisons en face sur P_2, $a^{0,1}$ ou $\sqrt[10]{a}$.

Inversement une grandeur «a» repérée sur P_2 correspond à a^{10} sur P_1 et à a^{100} sur P, lorsque ces valeurs sont lues sous le même trait du curseur. Naturellement «a» repérée sur P_1 se trouve en face de a^{10} lu sur P.

2° Opérations relatives aux échelles des puissances

a) Élévation d'un nombre à une puissance quelconque. $y = a^x$.
Il est recommandé d'opérer la réglette retournée, l'échelle P se trouvant en regard de D.

Calculons $y = a^x$ pour a plus grand que e et x plus grand que l'unité. Amenons «a» pris sur P en face de «1» de D; plaçons L sur l'exposant x repéré sur D et lisons le résultat en face sur P.

Applications:

$3^2 = 9$; $\quad 3^{1,41} = 4,71$

$3^3 = 27$; $\quad 3^{2,52} = 15,9$

Les opérations sur P_1 et P_2 se font suivant le même principe.
Exemple: $1,2^{3,1}$. Amenons «1,2» pris sur P_1 en face de «1» de D; Faisons coïncider L avec l'exposant 3,1 pris sur D; nous lisons le résultat 1, 76 en regard sur P_1

Nous avons: $1,2^{1,35} = 1,279$; $\quad 1,2^4 = 2,074$

$1,2^2 = 1,44$; $\quad 1,2^5 = 2,488$.

Exposants négatifs. Nous partons de la relation $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Nous calculons a^n et lisons son inverse sur l'échelle CI.

Ainsi: $3^{-2} = \frac{1}{9} = 0,111$; $\quad 3^{-1,41} = \frac{1}{4,71} = 0,2123$:

$3^{-3} = \frac{1}{27} = 0,037$; $\quad 3^{-2,52} = \frac{1}{15,09} = 0,0629$

b) Racines d'indice quelconque. $y = \sqrt[x]{a}$.

Soit $a = y^x$, on en déduit $y = \sqrt[x]{a}$. Pour extraire la racine nous procédons à l'opération inverse de celle pratiquée pour le calcul des puissances. Amenons «a» pris sur P en face de «x» de D, plaçons L sur «1» de D et lisons «y» sur P. Cette position de la réglette correspond à $y^x = a$ donc à $y = \sqrt[x]{a}$. Tandis que l'élévation à une puissance (y^x) consiste à additionner la distance «1 . . . x» à «y», nous retranchons «1 . . . x» de «1 . . . a» lorsque nous extrayons la racine $\left(\sqrt[x]{a}\right)$.

Exemples: $\sqrt[3]{2000} = 12,6$ $\sqrt[1,66]{1,8} = 1,425$ $\sqrt[3,52]{100} = 3,70$ $\sqrt[2,8]{1,05} = 1,0176$.

c) Logarithmes
Soit x le logarithme vulgaire de a. Ecrivons $10^x = a$. Amenons «10» de P en face de «1» de D. Repérons «a» sur P, nous lisons en regard sur D, le résultat «x» tel que $x = \log a$. Nous calculons de la même façon le logarithme népérien de a ($y = La$) en posant $e^y = a$. Nous plaçons e de P sur «1» de D et opérons comme ci-dessus.

Pour une base quelconque b nous écrivons $x = {}^b\!\log a$ d'où $b^x = a$. Nous procédons encore comme ci-dessus, en amenant toutefois la base b sur «1» de D.

Exemples: $\log 13 = 1,114$ $\quad {}^{13}\!\log 4 = 0,54$

$L\ 13 = 2,565$ $\quad {}^{13}\!\log 100 = 1,795$.

d) Transposition des Echelles des Puissances

$\sqrt{9} = 3$ est calculé comme ci-dessus. Effectuons $\sqrt[3]{9}$. Amenons «9» de P en face de «3» de D. En regard de «1» de D, sur P, il est impossible de lire le résultat «x», la réglette n'étant plus en face. Dans ce cas nous transposons les échelles d'une unité vers la gauche en procédant de la façon suivante: **repérons «e»** de P à l'aide de L. Déplaçons la réglette vers la gauche jusqu'à ce que e de P_1 vienne coïncider avec L. Nous lisons sur P_1 en face de «1» de D le résultat $x = 2,08$. Autre exemple $\sqrt[7]{1,8} = 1,0876$.

Si, à l'extraction d'une racine, une transposition des échelles des puissances était nécessaire, nous lisons le résultat sur l'échelle immédiatement supérieure.

e) Opérations effectuées, la réglette dans sa position normale

Pour un grand nombre d'opérations, nous calculons, la réglette retournée. Il est toutefois préférable de laisser la réglette dans sa position normale pour une ou deux opérations seulement. Les divisions de P, P_1 et P_2 sont alors lues et repérées à l'aide des traits d'index des échancrures pratiquées aux deux extrémités de la règle. Nommons le trait de gauche Tg, celui de droite Td.

Tg et Td coïncident exactement avec «1» et «10» de D. Par les deux fenêtres, nous ne voyons qu'une faible partie des échelles des puissances et la lecture s'avère plus difficile que précédemment.

Exemple: $x = 3^2$. Amenons «3» de P en coïncidence avec Td. Il conviendrait maintenant de porter la distance «1 . . . 2» prise sur D dans le prolongement à partir de «3» vers la droite, ce qui est impossible. Comme C et D sont identiques nous utilisons l'échelle mobile C de la réglette au lieu de D. Plaçons L sur «1» de C et déplaçons de réglette jusqu'à ce que «2» de C coïncide avec L. Nous lisons «x» sur P en face de **Td.**

Pour calculer 2^n, nous plaçons «2» de P_1 en face de Td et procédons de la même façon.

Nous avons ainsi:
$2^{1,1} = 2,144$; $2^{1,25} = 2,378$; résultats lus sur P_1. Prenons $n = 2$. La réglette ne se trouvant plus en regard de **Td**, il faut opérer sa transposition vers la gauche et lire le résultat en face de Tg. Mais dans cette position nous lisons $2^{0,2} = 1,1487$ au lieu de 2^2. Il est nécessaire d'élever à la puissance 10. Nous passons donc de l'échelle P_1 à P où nous lisons le résultat 4.

Déplaçons toujours la réglette vers la gauche; pour la division «3» de C (sous L) nous lisons en regard de **Tg** sur P le résultat 8.

Règle: Si, dans un calcul de puissances, une transposition des échelles vers la gauche est nécessaire, nous lisons le résultat sur l'échelle immédiatement inférieure.
Autre application $1,06^n$.

Plaçons 1,06 de P_2 en coïncidence avec Td et L en face de «1» de C. La lecture du résultat est impossible pour $n = 2$. En considérant Tg, nous lisons sur $P_2 : 1,06^{0,2} = 1,011739$; sur $P_1 : 1,06^2 = 1,1236$ et sur $P : 1,06^{20} = 3,21$.

L'extraction de la racine nécessite le déplacement de la réglette dans le sens opposé c'est à dire vers la droite.

Application $x = \sqrt{9}$.

Amenons «9» de P en coïncidence avec Td et plaçons L sur «2» de C. Déplaçons la réglette sur la droite jusqu'à ce que «1» de C vienne en regard de L. Le résultat est lu sur P en face de Td. Il est toutefois impossible d'effectuer de la même manière $\sqrt[3]{9}$. Nous plaçons «9» de P sous Tg, L sur «3» de C. La réglette n'étant plus en regard de Tg, nous effectuons sa transposition vers la droite et lisons en face de Td sur P_1, 2,08.

Autres exemples: $\sqrt[4]{9} = 1{,}732$; $\sqrt[5]{9} = 1{,}552$.

3° Cas particuliers

Les échelles P, P_1, P_2 portent les divisions allant de $a = 1{,}01$ à $a = 100\,000$. Nous avons déjà dit que la lecture et le repérage sur l'etrémité droite de l'échelle P sont imprécis. On peut aussi effectuer des opérations avec des nombres compris d'une part entre 1 et 1,01, d'autre part entre 0 et 1.

Toutes les opérations effectuées jusque là comportaient des exposants et des indices positifs; mais dans certains problèmes ils sont négatifs.

Les paragraphes qui vont suivre apportent les solutions de ces problèmes particuliers:

a) Valeurs plus grandes et voisines de 1

Nous utilisons les formules approchées:

$$\left(1+x\right)^n \approx 1 + n\cdot x;\quad \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n};\quad \left(1+x\right)^{\frac{p}{q}} \approx 1 + \frac{p}{q}\cdot x;$$

$$e^x \approx 1 + x;\quad a^x \approx 1 + x\,La;\quad L\,(1+x) \approx x;\quad \log x \approx 0{,}434\,x;$$

${}^a\log\left(1+x\right) \approx \dfrac{x}{La}$; x étant positif ou négatif.

L'exposant ne doit pas être trop éléve pour les calculs nécessitant l'emploi de la première et de la troisième formule.

Ces formules approchées donnent des résultats d'autant plus précis que x est plus faible.

Exemple: $x = 0{,}015$.

0,015 figurant encore sur l'échelle P_2, il est possible de vérifier les résultats trouvés, par lecture directe. Les résultats de contrôle sont indiqués entre parenthèses.

$1{,}015^3 \approx 1{,}045$ (1,0457); $\sqrt[3]{1{,}015} \approx 1{,}005$ (1005);

$1{,}015^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}010$ (1,010); $e^{0{,}015} \approx 1{,}015$ (1,0151); $3^{0{,}015} \approx 1 + 0{,}015 \cdot 1{,}009 \approx 1{,}0165$ (1,0166); $L\,1{,}015 \approx 0{,}015$ (0,01489); $\log 1{,}015 \approx 0{,}0065$ (0,00647);

${}^3\log 1{,}015 \approx 0{,}015 : 1{,}099 \approx 0{,}013655$ (0,01356).

Les deux réponses obtenues sont donc pratiquement les mêmes, mais l'emploi des formules approchées se justifie davantage encore pour les valeurs inférieures à 0,015, surtout si les exposants n et $\frac{p}{q}$ ne sont pas excessivement élevés.

b) Puissances et racines des nombres compris entre 0 et 1
Exposants négatifs

1° Soit a un nombre compris entre ces limites. Son inverse $b = \frac{1}{a}$, plus grand que l'unité, est lu sur l'échelle des inverses CI. Nous avons $a^n = \frac{1}{b^n}$,

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}};\quad a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{b^{\frac{p}{q}}};\quad La = -Lb;\ \log a = -\log b.$$

Les expressions contenant b sont calculées d'après les règles que nous connaisons déjà; les résultats sont lus sur CI.

2° Nous exprimons a par une fraction décimale.

Exemple: $x = 0{,}135^6 = \left(\frac{1{,}35}{10}\right)^6 = \frac{1{,}35^6}{10^6} = \frac{6{,}05}{1000000} = 0{,}00000605.$

3° Exposants négatifs.

Nous utilisons $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Le problème revient à élever un nombre à une puissance d'exposant positif et à rechercher son inverse sur CI.

Exemple: $x = 4^{-3{,}1} = 1 : 4^{3{,}1} = 1 : 73{,}5 = 0{,}01360$

$$y = 0{,}92^{-4{,}8} = \frac{1}{1{,}087}^{-4{,}8} = 1{,}087^{4{,}8} = 1{,}492.$$

c) Exposants et indices élevés

1° a est un nombre de l'échelle P, n un exposant élevé.
$5{,}3^6 = 22000$ résultat lu sur P.

L'échelle P est toutefois insuffisante pour le calcul de $5{,}3^7$. Nous avons le choix entre quatre procédés de calcul:

a) Décomposer l'exposant: $5{,}3^7 = (5{,}3^{3{,}5})^2$.
b) Décomposer a: $5{,}3^7 = 2{,}65^7 \cdot 2^7$.
c) Par logarithme: $\log 5{,}3^7 = 7 \cdot \log 5{,}3$.
d) Transformer a en une fraction:

$$5{,}3^7 = \frac{10^7}{1{,}887^7} = \frac{10000000}{85} = 117600.$$

2° a élevé, Calcul de a^n.

Exemple: $x = 314^{4{,}2}$.

Il existe 3 possibilités de calcul:

a) Décomposer x en facteurs: $x = (100 \cdot 3{,}14)^{4{,}2} = 100^{4{,}2} \cdot 3{,}14^{4{,}2}$
$100^{4{,}2} = 100^4 \cdot 100^{0{,}2} = 10^8 \cdot 2{,}512$
$3{,}14^{4{,}2} = 122$; $x = 3{,}07 \cdot 10^{10}$.

b) Par logarithme.
$\log x = 4{,}2 \cdot \log 314 = 4{,}2 \cdot 2{,}497 = 10{,}487$; $x = 3{,}07 \cdot 10^{10}$.

c) Extraire la racine carrée de a; extraire ensuite la racine carrée du nombre obtenu et opérer ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre suffisamment petit pour que la lecture de sa puissance n-iéme soit possible sur la règle; l'élever ensuite autant de fois à la puissance 2 que nous avons effectué d'extractions de racines carrées.

$\sqrt{314} = 17{,}72$; $\sqrt{17{,}72} = 4{,}21$; $\sqrt{4{,}21} = 2{,}052$; $2{,}052^{4{,}2} = 20{,}45$; $20{,}45^2 = 4{,}19 \cdot 10^2$; $(4{,}19 \cdot 10^2)^2 = 1{,}752 \cdot 10^5$; $(1{,}752 \cdot 10^5)^2 = 3{,}07 \cdot 10^{10}$.

L'extraction des racines des nombres élevés s'effectue d'une façon analogue.

Electrotechnique

Résolution de quelques problèmes d'électricité industrielle à l'aide de la règle à calculs «Darmstadt».

A) COURANT CONTINU

Application 1 — **Résistance d'un conducteur**

Trouver la résistance d'un fil de cuivre de 3930 m de longueur et de diamètre 1,1 mm.

$R = \frac{\varrho \cdot l}{s} = \frac{0,0172 \cdot 3930}{0,95} = 71,2\ \Omega$ Calcul de s. $s = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{1,1 \cdot \pi}{4} = 0,95\ mm^2$

Mode opératoire.

On place le trait repère située sur le coté droit du curseur sur le diamètre pris sur l'échelle «D». La surface (s) est lue sur l'échelle «A» en regard du trait repère milieu du curseur.

Calcul de R.

Amener 3930 de «B» en face de s (0,95) de «A». La résistance R est lue sur «B» en face de 0,0178 de «A».

$$\begin{array}{ll} A & 0,95 \rightarrow 0,0172 \\ \hline B & 3930 \rightarrow 71,2 \end{array} \qquad R = 71,2\ \Omega.$$

Application 2 — **Perte de puissance par effet Joule**

La résistance R de l'induit d'un moteur est de 0,18 Ω. Consommation à vide 2,9 ampères, en charge 38 ampères. Etablir les valeurs de P (P_1 à P_5) pour les intensités 2,9 — 5,7 — 11,3 — 26,8 et 38 ampères.

$$U = R\,I \qquad P = U\,I \qquad R = \frac{P}{I^2} \text{ d'où } \frac{1}{R} = \frac{I^2}{P}$$

Mode opératoire.

$$\begin{array}{lll} B & R \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 & \text{lire P sur B} \\ \hline D & 1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 & \text{place I sur D} \\ B & 1,51 \rightarrow 5,85 \rightarrow 23 \rightarrow 129 \rightarrow 260 & \\ \hline D & 2,9 \rightarrow 5,7 \rightarrow 11,3 \rightarrow 26,8 \rightarrow 38 & \end{array}$$

Les pertes sont donc:

$P_1 = 1,51$ W; $P_2 = 5,85$ W; $P_3 = 23$ W; $P_4 = 129$ W; $P_5 = 260$ W

Application 3 — **Rendement**

Calculer le rendement d'un moteur électrique, qui absorbe une puissance de 8,5 kW et fournit 9,4 ch.

$$\eta = \frac{9,4 \cdot 0,736}{8,5} = 0,813$$

Mode opératoire

$$\begin{array}{ll} C & 8,5 \rightarrow 0,736 \\ \hline D & 9,4 \rightarrow 0,813 \end{array}$$

Amener la division 8,5 de «C» en regard de 9,4 de «D». Le rendement est lu sur «D» en face de 0,736 pris sur «C».

Application 4

Calculer la puissance absorbée par un moteur électrique qui fournit 32 ch, son rendement étant 0,81.

$$P_a = \frac{32 \cdot 0,736}{0,81} = 29,05 \text{ kW.}$$

$$\begin{array}{ll} C & 0,81 \rightarrow 0,736 \\ \hline D & 32 \rightarrow 29,05 \end{array}$$

Amener la division 0,81 de «C» en regard de 32 lu sur «D». La puissance absorbée est lue sur «D» en face de 0,736 pris sur «C».

Application 5 — **Chute de tension**

Calculer la chute de tension dans un conducteur en cuivre ($\varrho = 0,0178$) de longueur 464 m, de diamètre 6 mm et pour les intensités 12—17,2—314 et 0,475 ampères.

$$U = I \cdot R \qquad R = \frac{\varrho l}{s} \qquad U = I\,\frac{\varrho l}{s} \qquad R = \frac{0,0172 \cdot 464}{28,3} = 0,282\ \Omega$$

$$\begin{array}{ll} A & 0,282 \rightarrow 3,38 \rightarrow 4,85 \rightarrow 88,5 \rightarrow 0,143 \\ \hline B & 1 \rightarrow 12 \rightarrow 17,2 \rightarrow 314 \rightarrow 0,475 \end{array}$$

Donc $U_1 = 3,38$ volts; $U_2 = 4,85$ volts $U_3 = 88,5$ volts; $U_4 = 0,134$ volts.

B) COURANT ALTERNATIF

Application 6 — **Facteur de puissance**

Calculer le facteur de puissance d'un circuit monophasé qui absorbe un courant de 6,5 ampéres sous une tension de 150 volts, le wattmètre indiquant 828 watts.

$P = U\,I \cos\varphi$; Nous posons $\frac{\cos\varphi}{P} = \frac{1 : U}{I} = \frac{1 : I}{U}$

et repérons U ou I sur l'échelle des inverses.

Mode opératoire

$$\begin{array}{ll} R & 6,5 \\ \hline D & 150 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} C & 0,85 \\ \hline D & 828 \end{array} \qquad \cos\varphi = 0,85$$

Application 7 — **Impédance**

Calcul de l'impédance Z d'un circuit possédant une résistance R de 3 ohms, une self L de 0,022 Henry et qui est parcouru par un courant de 50 c/s.

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \omega^2 L^2 = (100\,\pi \cdot 0,022)^2 = m$$

Mode opératoire

$$\frac{C}{D} \longrightarrow \frac{1}{\pi} \qquad \frac{A}{C} \longrightarrow \frac{47,75}{2,2} \qquad \text{donc } m = 47,75$$

$$Z = \sqrt{9 + 47,75} = \sqrt{56,75} = 7,53\ \Omega.$$

Application 8 — **Fréquence et longueur d'onde d'un circuit oscillant** (formule de Thomson)

Calculer la fréquence f et la longueur d'onde λ d'un circuit oscillant présentant une self L de 180 μH et une capacité C de 390 μμF.

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}} = \frac{10^6}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{70200}} = \frac{0,159 \cdot 10^6}{265} = 600 \text{ kc/s.}$$

Mode opératoire.

$$\frac{A}{B} \quad \frac{180}{1} \longrightarrow \frac{70\,200}{390}$$

$$D \quad \sqrt{LC} \quad (265)$$

Nous posons ensuite: $\frac{C}{D} \longrightarrow \uparrow \frac{0{,}159}{\sqrt{LC}} \longrightarrow \uparrow \frac{C}{D} \quad \frac{600}{10}$ donc $f = 600$ kc/s.

Longueur d'onde $\lambda = 2\pi V \cdot \sqrt{LC} = \frac{2\pi \cdot 300\,000 \cdot 265}{10^6} = 500$ m

Calcul de $\sqrt{LC}$ comme ci-dessus.

Mode opératoire $\frac{CI}{D} \quad \frac{300\,000}{2\pi} \longrightarrow \frac{C}{D\cdot} \quad \frac{265}{500}$; donc $\lambda = 500$ m

Application 9 — **Self d'une bobine à une couche**
(D'après Nagaoka)

$L = \frac{(\pi d n)^2 \cdot l \cdot k}{1000}$; k étant le coefficient de Nagaoka qui dépend du rapport $\frac{d}{l}$.
Calculer la self L d'une bobine à une couche de longueur l de 9 cm, de diamétre 4,5 cm et ayant 14 tours au centimètre.

$$\text{Pour } \frac{d}{l} = 0{,}5; \quad k = 0{,}818. \quad L = \frac{d^2 n^2 l\, k}{\frac{1}{\pi^2} \cdot 1000} = \frac{4{,}5^2 \cdot 14^2 \cdot 9 \cdot 0{,}818}{101 \cdot 4} = 289\ \mu H$$

Mode opératoire

$$\frac{A}{CI} \quad \frac{9}{4{,}5} \downarrow \longrightarrow \uparrow \frac{A}{C} \quad \frac{354}{14} \longrightarrow \frac{A}{B} \quad \frac{354}{101{,}4} \downarrow \longrightarrow \uparrow \frac{A}{B} \quad \frac{289}{818}$$

Self $L = 289\ \mu$H.

Application 10 — **Capacité électrostatique d'une ligne aérienne**
(2 câbles parallèles)

Calculer la capacité électrostatique C d'une ligne aérienne, connaisant le rapport $\frac{a}{r} = 90$. a = écartement des conducteurs en cm (p. ex. 108 cm)
r = diamètre des conducteurs en cm. (p. ex. 1,2 cm)

Mode opératoire $C = \frac{l}{360 \cdot \ln \frac{a}{r}}$

1) $\ln \frac{a}{r} = \ln 90$; retourner la règle et placer 90 de l'échelle «e^x» sous l'index de gauche (dans l'échancrure à gauche), ensuite, lire sur la face de la régle, en face de 1 de D, sur C, la valeur 4,5;

$\ln 90 = 4{,}5$

2) placer: $\frac{R}{D} \quad \frac{36}{4{,}5} \longrightarrow \frac{C}{D} \quad \frac{0{,}006175}{10}$ donc $C = 0{,}006175$ F

Amusez-vous à faire les calculs.

edition greis